2012 B I Lösung

BE 1.0 Auf einem Spielplatz wird über dem Sandkasten ein dreieckiges Sonnensegel angebracht. Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die Punkte $A_1(0;0;0)$, $A_2(5;0;0)$, $A_3(5;5;0)$ und $A_4(0;5;0)$ die Ecken des Sandkastens beschreiben. Das Sonnensegel wird im Punkt A_3 fest an der Sandkastenecke und in den Punkten $B_k(4;0;k)$ und $C_k(0;4;k)$ jeweils an einer senkrechten Stütze befestigt. Dabei ist k ein reeller Parameter.
Für die Einheiten auf den Koordinatenachsen gilt jeweils $1\text{LE} = 1\text{m}$, bei den Berechnungen kann auf die Verwendung der Einheiten verzichtet werden.

5 1.1 Bestimmen Sie k so, dass das Sonnensegel die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat.

Damit das Sonnensegel ein gleichseitiges Dreieck ist, müssen die Strecken $\overline{A_3B_k}$, $\overline{A_3C_k}$ und $\overline{B_kC_k}$ gleich lang sein. Also muss gelten:

$$\left|\overrightarrow{A_3B_k}\right| = \left|\overrightarrow{A_3C_k}\right| = \left|\overrightarrow{B_kC_k}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix} 4-5 \\ 0-5 \\ k-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-5 \\ 4-5 \\ k-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ k-k \end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ k \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+k^2} = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2+k^2} = \sqrt{(-4)^2+4^2+0^2}$$

$$\sqrt{26+k^2} = \sqrt{26+k^2} = \sqrt{32}$$

Somit folgt:

$$26+k^2 = 32$$

$$k^2 = 6$$

$$k_1 = \sqrt{6}$$

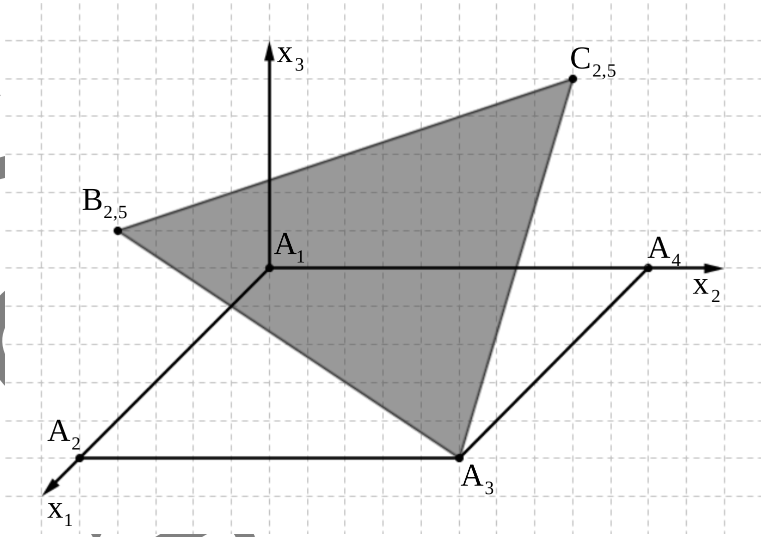
$$\left(k_2 = -\sqrt{6}\right)$$

Als Lösung kommt nur $k_1 = \sqrt{6}$ in Frage, da für $k_2 = -\sqrt{6}$ die Punkte $B_{-\sqrt{6}}$ und $C_{-\sqrt{6}}$ eine negative x_3-Koordinate hätten und folglich unterhalb der Erdoberfläche lägen.

Setzen Sie für die folgenden Aufgaben $k = 2{,}5$

2 | 1.2 Stellen Sie den Sandkasten und das Sonnensegel in einer Skizze im kartesischen Koordinatensystem dar.

$A_1(0;0;0)$, $A_2(5;0;0)$, $A_3(5;5;0)$, $A_4(0;5;0)$, $B_{2,5}(4;0;2,5)$, $C_{2,5}(0;4;2,5)$



4 | 1.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sonnensegels

Für den Flächeninhalt gilt:

$$A_\Delta = \tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{A_3B_{2,5}}\times\overrightarrow{A_3C_{2,5}}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}4-5\\0-5\\2,5-0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0-5\\4-5\\2,5-0\end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-1\\-5\\2,5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\-1\\2,5\end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-5\cdot 2,5-2,5\cdot(-1)\\2,5\cdot(-5)-(-1)\cdot 2,5\\-1\cdot(-1)-(-5)\cdot(-5)\end{pmatrix}\right|$$

$$= \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-10\\-10\\-24\end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{100+100+576} = \tfrac{1}{2}\sqrt{776} = \sqrt{194}$$

4 | 1.4 Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Fläche des Sonnensegels und der x_1,x_2-Ebene auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Der Winkel zwischen der Fläche des Sonnensegels und der x_1,x_2-Ebene ist gleich dem eingeschlossenen Winkel der beiden Flächennormalen.
Die Flächennormale des Sonnensegels haben wir schon in 1.3 ausgerechnet:

$$\vec{n}_\Delta = \overrightarrow{A_3B_{2,5}}\times\overrightarrow{A_3C_{2,5}} = \begin{pmatrix}-10\\-10\\-24\end{pmatrix}$$

Die Flächennormale der x_1,x_2-Ebene ist $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Somit folgt für den eingeschlossenen Winkel α:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_\Delta \circ \vec{n}_3\right|}{\left|\vec{n}_\Delta\right| \cdot \left|\vec{n}_3\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -24 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{776}\cdot 1} = \frac{24}{\sqrt{776}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 30{,}51°$$

2.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebenen E_a und die Gerade g gegeben:

$E_a : (1+a)\cdot x_1 + a\cdot x_2 - (a-2)\cdot x_3 - a = 0$

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 2.1 Geben Sie für $a = 0$ die besondere Lage der Ebene E_0 im Koordinatensystem an.

$E_0 : x_1 + 2\cdot x_3 = 0$

Da der x_2 – Term fehlt (Zahl vor dem x_2 ist Null) ist die Ebene parallel zur x_2 – Achse.
Da das konstante Glied fehlt, läuft die Gerade durch den Koordinatenursprung.
Insgesamt lässt sich daraus folgern, dass die Ebene E_0 die x_2 – Achse enthält.

5 2.2 Untersuchen Sie die Lage der Geraden g zu den Ebenen E_a in Abhängigkeit von a.

g in E_a einsetzen:

$$\begin{aligned}
(1+a)\cdot(1-\lambda) + a\cdot\lambda - (a-2)\cdot(-1+\lambda) - a &= 0 \\
1 + a - \lambda - a\lambda + a\lambda + a - a\lambda - 2 + 2\lambda - a &= 0 \\
a - a\lambda - 1 + \lambda &= 0 \\
\lambda - a\lambda &= 1 - a \\
(1-a)\lambda &= 1-a
\end{aligned}$$

1. Fall: $a = 1$
   Dann liefert die letzte Gleichung eine wahre Aussage.
   Somit liegt die Gerade g in der Ebene E_1.
2. Fall: $a \neq 1$
   Dann lässt sich die letzte Gleichung durch $(1-a)$ dividieren und man erhält $\lambda = 1$.
   Somit schneidet die Gerade g die Ebene E_a in jeweils genau einem Punkt.

3 | 2.3 Zeigen Sie, dass der Punkt $P(2;-2;-1)$ auf allen Ebenen E_a, aber nicht auf der Geraden g liegt.

P in E_a einsetzen:

$$\begin{aligned}(1+a)\cdot 2+a\cdot(-2)-(a-2)\cdot(-1)-a&=0\\ 2+2a-2a+a-2-a&=0\\ 0&=0\quad(w)\end{aligned}$$

Somit liegt der Punkt P für jedes a in der Ebene E_a.

P in g einsetzen:

$$\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}2=1-\lambda\\-2=\lambda\\-2=-1+\lambda\end{matrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda=-1\\\lambda=-2\\\lambda=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow P\notin g$$

5 | 2.4 Der Punkt P und die Gerade g legen eine Ebene F fest. Geben Sie eine Gleichung der Ebene F in Parameterform an und schließen Sie aus Ihren bisherigen Ergebnissen auf die Lage der Ebenen E_a zur Ebene F in Abhängigkeit von a.
Begründen Sie Ihre Aussage ohne weitere Rechnungen.

$$F:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2-1\\-2-0\\-1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\text{ mit }\eta,\mu\in\mathbb{R}$$

Nach 2.3 liegt der Punkt P in der Ebene E_a und nach 2.4 auch in der Ebene F. Somit haben die beiden Ebenen E_a und F eine nichtleere Schnittmenge.

1. Fall: $a=1$
   Nach 2.2 liegt die Gerade g in der Ebene E_1.
   Nach 2.4 liegt die Gerade g aber auch in der Ebene F.
   Nach 2.3 liegt der Punkt P nicht auf der Geraden g, aber dafür sowohl in F als auch in E_1.
   Also liegt der Punkt P als auch die Gerade g sowohl in F als auch in E_1.
   Folglich müssen die Ebenen F und E_1 identisch sein $(E_1=F)$.
2. Fall: $a\neq 1$
   Nach 2.2 schneidet die Gerade g die Ebene E_a in genau einem Punkt, den wir mal Q nennen.
   Der Punkt P liegt sowohl in der Ebene F als auch in der Ebene E_a (nicht aber auf g).
   Dann liefert die Gerade durch P und Q (Beachte: $P\neq Q$)die Schnittgerade der Ebenen F und E_a $(E_a\cap F=g(P,Q))$.

30