2012 A II Lösung

BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{x^2+ax}{2x-4}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der größtmöglichen Definitionsmenge $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.
3	1.1	Geben Sie $\mathbb{D}$ an und bestimmen Sie die Art der Definitionslücke in Abhängigkeit von a.

$$f_a(x)=\frac{x^2+ax}{2x-4}=\frac{x(x+a)}{2(x-2)}$$

Nullstelle des Nenners: $x_N = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Nullstellen des Zählers: $x_1 = 0$ und $x_2 = -a$

1. Fall: $a=-2$
   In diesem Fall lässt sich die einfach Nennernullstelle mit einer einfachen Zählernullstelle kürzen; die Definitionslücke ist somit stetig behebbar.
2. Fall: $a \neq -2$
   Die Nennernullstelle lässt sich hier nicht kürzen; da sie einfach ist liegt hier eine Polstelle (Unendlichkeitsstelle) mit Vorzeichenwechsel vor.

3 | 1.2 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a Lage und Anzahl der Nullstellen von f_a.

1. Fall: $a=0 \quad \Rightarrow \quad f_0(x)=\frac{x^2}{2x-4}$
   Eine Nullstelle bei $x_1 = 0$
2. Fall: $a=-2$ $f_{-2}(x)=\frac{x(x-2)}{2(x-2)}=\frac{x}{2}$
   Eine Nullstelle bei $x_1 = 0$
3. Fall: $a \in \mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$
   Zwei Nullstellen nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = -a$

10 | 1.3 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a Anzahl, Abszissenwerte und Art der Extrempunkte von G_a.

$$\left[\text{mögliches Teilergebnis}: f_a'(x)=\frac{x^2-4x-2a}{2\cdot(x-2)^2}\right]$$

$$f_a'(x)=\frac{(2x-4)\cdot(2x+a)-(x^2+ax)\cdot 2}{(2x-4)^2}$$

$$f_a'(x)=\frac{4x^2+2ax-8x-4a-2x^2-2ax}{(2x-4)^2}=\frac{2x^2-8x-4a}{(2x-4)^2}=0$$

$\Rightarrow\quad 2x^2-8x-4a=0$

$\Rightarrow\quad x_{1/2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64-4\cdot 2\cdot(-4a)}}{2\cdot 2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64+32a}}{4}=\dfrac{8\pm 4\sqrt{4+2a}}{4}=2\pm\sqrt{4+2a}$

Entscheidend für die Anzahl der Lösungen ist die Diskriminante (der Term unter der Wurzel) $D=4+2a$

1. Fall: $D=4+2a<0 \;\Rightarrow\; a<-2$
   Es gibt kein Extremum.
2. Fall: $D=4+2a=0 \;\Rightarrow\; a=-2 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=2\notin \mathbb{D}$
   Somit auch in diesem Fall kein Extremum.
3. Fall: $D=4+2a>0 \;\Rightarrow\; a>-2 \;\Rightarrow\; \Rightarrow\; x_1=2+\sqrt{4+2a}$ und $x_2=2-\sqrt{4+2a}$
   In diesem Fall gibt es zwei Extrempunkte.

x		x_2		2		x_1	
$2x^2-8x-4a$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(2x-4)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f_a'(x)$	$+$		$-$	n.d.	$-$		$+$
G_a	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		HP				TP	

G_a hat an der Stelle $x_2=2-\sqrt{4+2a}$ einen relativen Hochpunkt und an der Stelle $x_1=2+\sqrt{4+2a}$ einen relativen Tiefpunkt.

1.4.0 Für $a=-5$ erhält man die Funktion $f_{-5}: x\mapsto \dfrac{x^2-5x}{2x-4},\; x\in\mathbb{D}$.

4 1.4.1 Bestimmen Sie Gleichungen aller Asymptoten von G_{-5} und geben Sie die Nullstellen von f_{-5} an.

Senkrechte Asymptote: $x=2$

Polynomdivision:

$$\left(x^2-5x\right):\left(2x-4\right)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}-\frac{6}{2x-4}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^2-2x} \\
\quad -3x \\
\quad \underline{-3x+6} \\
\qquad\quad -6
\end{array}$$

Schiefe Asymptote: $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

Nullstellen:

$f_{-5}(x)=\dfrac{x^2-5x}{2x-4}=\dfrac{x(x-5)}{2x-4}=0 \;\Rightarrow\; x_1=0 \wedge x_2=5$

Folgt aber auch mit 1.2, 3. Fall

4 1.4.2 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_{-5}.

$$f_{-5}'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 20}{(2x-4)^2}$$

Nach Aufgabe 1.3 hat $f_{-5}'(x)$ keine Nullstelle.
Vorzeichentabelle:

	$x < 2$	2	$x > 2$
$2x^2 - 8x + 20$	+		+
$(2x-4)^2$	+	0	+
$f_{-5}'(x)$	+	n.d.	+
G_{-5}	↗		↗

G_{-5} ist somit streng monoton steigend für $x \in]-\infty; 2[$ und für $x \in]2; \infty[$

6 1.4.3 Zeigen Sie, dass die Gerade h mit der Gleichung $y = \frac{7}{12}x - \frac{2}{3}$ mit $x \in \mathbb{R}$ Tangente an den Graphen G_{-5} ist, und berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes P.
$\left[\text{Teilergebnis}: P(-4; -3)\right]$

1. Lösungsweg:
Man setzt die beiden Funktionsterm gleich:

$$f_{-5}(x) = h(x)$$
$$\frac{x^2 - 5x}{2x-4} = \tfrac{7}{12}x - \tfrac{2}{3}$$
$$x^2 - 5x = (2x-4)\cdot\left(\tfrac{7}{12}x - \tfrac{2}{3}\right)$$
$$x^2 - 5x = \tfrac{7}{6}x^2 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{7}{3}x + \tfrac{8}{3}$$
$$0 = \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{8}{3}$$
$$x_{1/2} = \frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{3}}}{2\cdot\frac{1}{6}} = \frac{-\frac{4}{3} \pm 0}{\frac{1}{3}} = -4 \quad (2x)$$

D.h. an der Stelle $x_1 = -4$ liegt eine doppelte Schnittstelle vor, die Graphen berühren sich somit. Die Gerade h ist dann Tangente an den Graph G_{-5}.

Für die Koordinaten des Berührpunktes folgt:

$h(-4) = \frac{7}{12}\cdot(-4) - \frac{2}{3} = -3 \quad \Rightarrow \quad P(-4|-3)$

Bemerkung: Wenn man nicht weiß, dass aus einer doppelten Schnittstelle folgt, dass sich die Graphen berühren, der hätte auch folgendermaßen vorgehen können: Man zeigt, dass gilt:

$$f_{-5}'(-4) = h'(-4)$$

also $f_{-5}'(-4) = \frac{7}{12}$

Dann haben die Graphen die gleiche Steigung und somit ist die Gerade h Tangente an den Graph G_{-5}.

2. Lösungsweg:
Man setzt die beiden Ableitungen gleich:

$$f_{-5}'(x) = h'(x)$$

$$\frac{2x^2 - 8x + 20}{(2x-4)^2} = \tfrac{7}{12} \qquad |\cdot(2x-4)^2$$

$$2x^2 - 8x + 20 = \tfrac{7}{12}\left(4x^2 - 16x + 16\right)$$

$$2x^2 - 8x + 20 = \tfrac{7}{3}x^2 - \tfrac{28}{3}x + \tfrac{28}{3}$$

$$-\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{32}{3} = 0$$

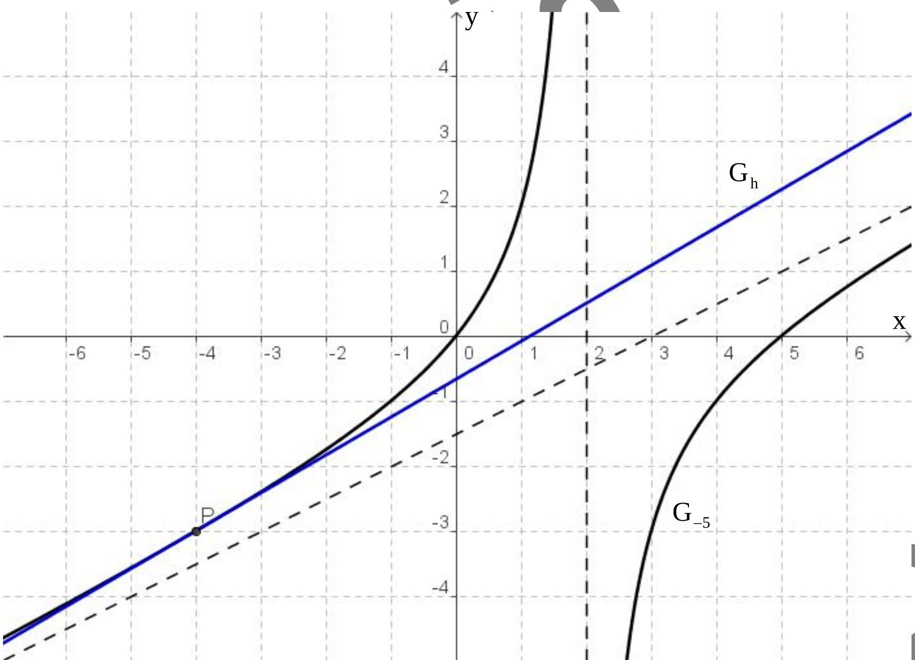
$$x_{1/2} = \frac{-\tfrac{4}{3} \pm \sqrt{\tfrac{16}{9} - 4\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)\cdot\tfrac{32}{3}}}{2\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)} = \frac{-\tfrac{4}{3} \pm 4}{-\tfrac{2}{3}} = \begin{cases} -4 \\ 8 \end{cases}$$

An diesen beiden Stellen haben die Graphen die gleiche Steigung.
Nun muss man noch überprüfen, ob sie sich an diesen Stellen auch schneiden, also setzt man die x-Werte in die beiden Funktionsterme ein.

$$\left.\begin{array}{l} f_{-5}(-4) = \dfrac{(-4)^2 - 5\cdot(-4)}{2\cdot(-4) - 4} = -3 \\ h(-4) = \tfrac{7}{12}\cdot(-4) - \tfrac{2}{3} = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \; P(-4|-3) \;\text{ ist Berührpunkt}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{-5}(8) = \dfrac{8^2 - 5\cdot 8}{2\cdot 8 - 4} = 2 \\ h(8) = \tfrac{7}{12}\cdot 8 - \tfrac{2}{3} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \;\text{keine Schnittstelle!}$$

6 1.4.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f_{-5} mit seinen Asymptoten und der Tangente aus 1.4.3 für $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: $1\text{LE} = 1\text{cm}$.



3 1.4.5 Bestimmen Sie mittels Integration eine Stammfunktion F_{-5} der Funktion f_{-5}.

$$\left[\text{mögliches Ergebnis}: F_{-5}(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}x^2 - x - \ln\left((x-2)^2\right)\right)\right]$$

$$F_{-5}(x) = \int\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} - \frac{6}{2x-4}\right)dx = \int\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} - \frac{3}{x-2}\right)dx = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{2}x - 3\cdot\ln|x-2|$$

Die Integrationskonstante wird hier gleich Null gesetzt, da eine Stammfunktion gesucht ist (und nicht alle!).

Auf das mögliche Ergebnis kommt man mit folgender Umformung (war aber nicht verlangt!)

$$F_{-5}(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{2}x - 3\cdot\ln|x-2|$$

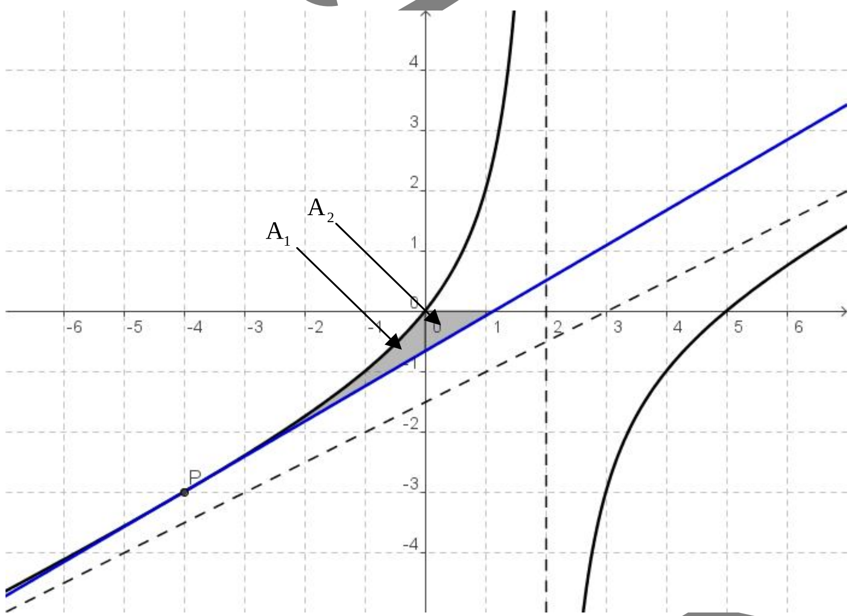
$$F_{-5}(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{2}x - \tfrac{3}{2}\cdot 2\cdot\ln|x-2|$$

$$F_{-5}(x) = \tfrac{3}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{6}x^2 - x - 2\cdot\ln|x-2|\right)$$

$$F_{-5}(x) = \tfrac{3}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{6}x^2 - x - \ln\left(|x-2|\right)^2\right)$$

$$F_{-5}(x) = \tfrac{3}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{6}x^2 - x - \ln(x-2)^2\right)$$

9 1.4.6 Der Graph G_{-5} schließt zusammen mit der Tangente h aus 1.4.3 und der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses im Schaubild der Aufgabe 1.4.4 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet.



Die gesuchte Fläche A wird durch die y-Achse in zwei Teilflächen A_1 und A_2 geteilt:

$$A_1=\int_{-4}^{0}\left(f_{-5}(x)-h(x)\right)dx=\int_{-4}^{0}\left(f_{-5}(x)-\left(\tfrac{7}{12}x-\tfrac{2}{3}\right)\right)dx=\int_{-4}^{0}\left(f_{-5}(x)-\tfrac{7}{12}x+\tfrac{2}{3}\right)dx=$$

$$A_1=\left[\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{3}{2}x-3\cdot\ln|x-2|-\tfrac{7}{24}x^2+\tfrac{2}{3}x\right]_{-4}^{0}$$

$$A_1=-3\cdot\ln|-2|-\left(\tfrac{1}{4}\cdot(-4)^2-\tfrac{3}{2}\cdot(-4)-3\cdot\ln|-4-2|-\tfrac{7}{24}\cdot(-4)^2+\tfrac{2}{3}\cdot(-4)\right)$$

$$A_1=-3\cdot\ln(2)-\left(4+6-3\cdot\ln|-6|-\tfrac{14}{3}-\tfrac{8}{3}\right)$$

$$A_1=-3\cdot\ln(2)-\tfrac{8}{3}+3\cdot\ln(6)$$

$$A_1=3\ln(3)-\tfrac{8}{3}$$

Die Fläche A_2 ist ein rechtwinkliges Dreieck. Für diese gilt: $A_2=\frac{1}{2}gh$

$g \mathrel{\hat{=}} \text{Grundseite} \mathrel{\hat{=}} \text{Nullstelle der Geraden}: \frac{7}{12}x-\frac{2}{3}=0 \Rightarrow x=\frac{8}{7}=g$

$h \mathrel{\hat{=}} \text{Höhe} \mathrel{\hat{=}} \text{Betrag des y-Achsenabschnitts der Geraden}: h=\frac{2}{3}$

Somit folgt: $A_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{21}$

$$A=A_1+A_2=3\ln(3)-\tfrac{8}{3}+\tfrac{8}{21}=3\ln(3)-\tfrac{16}{7}\approx 1{,}01$$

2.0 Nach der Einnahme eines Medikaments kann man dessen Konzentration im Blut des Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden nach der Einnahme beschreibt die Funktion g mit dem Funktionsterm $g(t)=10\cdot t\cdot e^{-0{,}5\cdot t}$ die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten (in Milligramm pro Liter) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden seit der Einnahme), wobei auf das Mitführen der Einheiten verzichtet wird. Nach 6 Stunden seit der Einnahme erfolgt der weitere Abbau des Medikaments dann linear.

5 2.1 Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten und den Zeitpunkt, zu dem diese vorliegt.

$$\left[\text{Teilergebnisse}: \frac{dg(t)}{dt}=(10-5t)\cdot e^{-0{,}5\cdot t} \qquad \text{maximale Konzentration}\approx 7{,}36\left(\frac{mg}{\ell}\right)\right]$$

$$\dot{g}(t)=10\cdot e^{-0{,}5\cdot t}+10\cdot t\cdot e^{-0{,}5\cdot t}\cdot(-0{,}5)=(10-5t)\cdot\underbrace{e^{-0{,}5\cdot t}}_{\neq 0}=0 \;\Rightarrow\; 10-5t=0 \;\Rightarrow\; t=2$$

$$\ddot{g}(t)=-5\cdot e^{-0{,}5\cdot t}+(10-5t)\cdot e^{-0{,}5\cdot t}\cdot(-0{,}5)=(-5+5-2{,}5)e^{-0{,}5\cdot t}=(-10+2{,}5t)e^{-0{,}5\cdot t}$$

$$\ddot{g}(2)=-5e^{-1}<0 \;\Rightarrow\; \text{rk} \;\Rightarrow\; \text{Maximum}$$

$g(2)=20\cdot e^{-1}\approx 7{,}36$ ist die maximale Konzentration

5 | 2.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am schnellsten abgebaut wird.

Die Änderungsrate der Konzentration des Medikaments im Blut gibt die 1. Ableitung der Funktion g an. Möchte man nun wissen, zu welchem Zeitpunkt die Änderungsrate am größten ist (also das Medikament am schnellsten abgebaut wird) muss man den rel. Tiefpunkt des Graphen der 1. Ableitung suchen. Dazu bildet man die 1. Ableitung der Funktion $\dot{g}(t)$

$$\ddot{g}(t) = (-10+2{,}5t)e^{-0{,}5\cdot t} = 0 \quad \Rightarrow \quad -10+2{,}5t=0 \quad \Rightarrow \quad t=4$$

		4	x
$-10+2{,}5t$	$-$	0	$+$
$e^{-0{,}5\cdot t}$	$+$		$+$
$\ddot{g}(t)$	$-$	0	$+$
$G_{\dot{g}}$	$\searrow$	$\rightarrow$ TP	$\nearrow$

Nach 4 Stunden wird das Medikament somit am schnellsten abgebaut.

5 | 2.3 Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente s an den Graphen von g im Punkt $P(6; g(6))$ beschrieben. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente s und berechnen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

$$g(6) = 10\cdot 6\cdot e^{-0{,}5\cdot 6} = 60\cdot e^{-3} \quad \Rightarrow \quad P\left(6 \middle| 60\cdot e^{-3}\right)$$

$$\dot{g}(6) = (10-5\cdot 6)\cdot e^{-0{,}5\cdot 6} = -20\cdot e^{-3} = m$$

y-Achsenabschnitt k bestimmen (wird hier nicht mit t bezeichnet, da t ja hier für die Zeit steht):

$$60\cdot e^{-3} = -20\cdot e^{-3}\cdot 6 + k \quad \Rightarrow \quad k = 180\cdot e^{-3}$$

Geradengleichung (Tangente an G_g im Punkt P):

$$y = -20\cdot e^{-3}\cdot t + 180\cdot e^{-3}$$

Nullstelle der Geraden bestimmen:

$$0 = -20\cdot e^{-3}\cdot t + 180\cdot e^{-3} \quad \Rightarrow \quad 20\cdot e^{-3}\cdot t = 180\cdot e^{-3} \quad \Rightarrow \quad t = 9$$

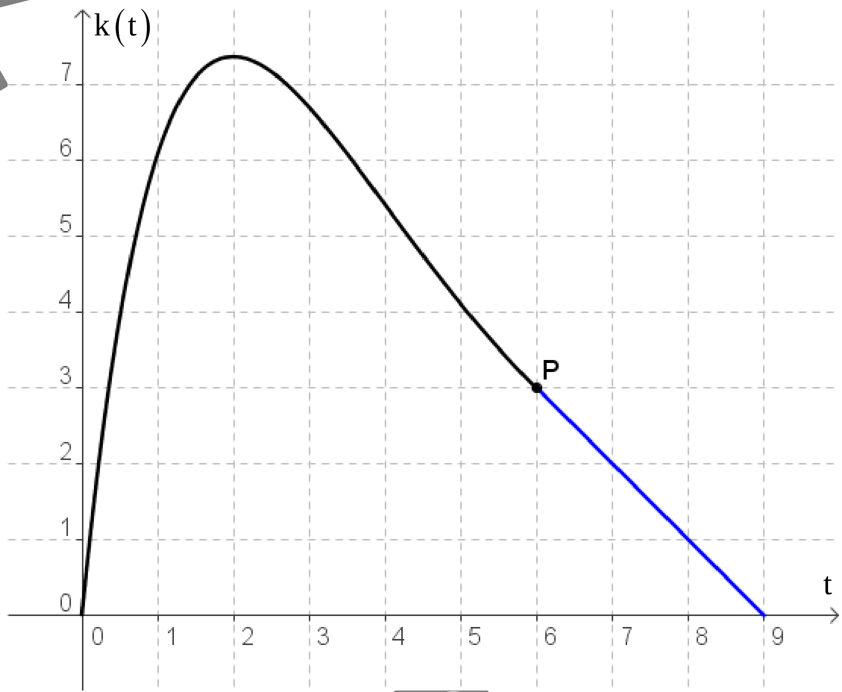
Nach 9 Stunden ist somit das Medikament vollständig abgebaut.

3 2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $k: t \mapsto k(t)$, die die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten innerhalb der ersten 9 Stunden nach der Einnahme beschreibt.

Zu zeichnen ist also der Graph der Funktion

$$k(t) = \begin{cases} 10 \cdot t \cdot e^{-0,5 \cdot t} & 0 \le t < 6 \\ -20 \cdot e^{-3} \cdot t + 180 \cdot e^{-3} & 6 \le t \le 9 \end{cases}$$

Dabei ist der zweite Teil des Graphen die Tangente an G_g im Punkt P (dies schneidet die t-Achse bei 9).



4 2.5 Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren den Zeitpunkt, zu dem sich die Konzentration des Medikaments im Blut auf die Hälfte der maximalen Konzentration reduziert hat. Benutzen Sie als Startwert $t_0 = 5$ und führen Sie einen Näherungsschritt aus.

$$g(t) = \tfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot e^{-1}$$

$$10 \cdot t \cdot e^{-0,5 \cdot t} = 10 \cdot e^{-1}$$

$$10 \cdot t \cdot e^{-0,5 \cdot t} - 10 \cdot e^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow h(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0,5 \cdot t} - 10 \cdot e^{-1} \quad \Rightarrow \quad h(5) = 50 \cdot e^{-2,5} - 10 \cdot e^{-1}$$

$$\Rightarrow \dot{h}(t) = (10 - 5t) \cdot e^{-0,5 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \dot{h}(5) = -15 \cdot e^{-2,5}$$

$$t_1 = t_0 - \frac{h(5)}{\dot{h}(5)} = 5 - \frac{50 \cdot e^{-2,5} - 10 \cdot e^{-1}}{-15 \cdot e^{-2,5}} = 5 + \tfrac{10}{3} - \tfrac{2}{3} \cdot e^{1,5} \approx 5,35$$

70