2012 A II Angabe

BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{x^2 + ax}{2x - 4}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der größtmöglichen Definitionsmenge $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.
3	1.1	Geben Sie $\mathbb{D}$ an und bestimmen Sie die Art der Definitionslücke in Abhängigkeit von a.
3	1.2	Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a Lage und Anzahl der Nullstellen von f_a.
10	1.3	Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a Anzahl, Abszissenwerte und Art der Extrempunkte von G_a. $\left[\text{mögliches Teilergebnis}: f_a{}'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2a}{2 \cdot (x-2)^2}\right]$
	1.4.0	Für $a = -5$ erhält man die Funktion $f_{-5} : x \mapsto \frac{x^2 - 5x}{2x - 4}$, $x \in \mathbb{D}$.
4	1.4.1	Bestimmen Sie Gleichungen aller Asymptoten von G_{-5} und geben Sie die Nullstellen von f_{-5} an.
4	1.4.2	Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_{-5}.
6	1.4.3	Zeigen Sie, dass die Gerade h mit der Gleichung $y = \frac{7}{12}x - \frac{2}{3}$ mit $x \in \mathbb{R}$ Tangente an den Graphen G_{-5} ist, und berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes P. $\left[\text{Teilergebnis}: P(-4; -3)\right]$
6	1.4.4	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f_{-5} mit seinen Asymptoten und der Tangente aus 1.4.3 für $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: $1\text{LE} = 1\text{cm}$.
3	1.4.5	Bestimmen Sie mittel Integration eine Stammfunktion F_{-5} der Funktion f_{-5}. $\left[\text{mögliches Ergebnis}: F_{-5}(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}x^2 - x - \ln\left((x-2)^2\right)\right)\right]$
9	1.4.6	Der Graph G_{-5} schließt zusammen mit der Tangente h aus 1.4.3 und der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses im Schaubild der Aufgabe 1.4.4 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet.

2.0 Nach der Einnahme eines Medikaments kann man dessen Konzentration im Blut des Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden nach der Einnahme beschreibt die Funktion g mit dem Funktionsterm $g(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0,5 \cdot t}$ die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten (in Milligramm pro Liter) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden seit der Einnahme), wobei auf das Mitführen der Einheiten verzichtet wird. Nach 6 Stunden seit der Einnahme erfolgt der weitere Abbau des Medikaments dann linear.

5 2.1 Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten und den Zeitpunkt, zu dem diese vorliegt.

$$\left[\text{Teilergebnisse:} \ \frac{dg(t)}{dt} = (10 - 5t) \cdot e^{-0,5 \cdot t} \qquad \text{maximale Konzentration} \approx 7{,}36 \left(\frac{mg}{\ell} \right) \right]$$

5 2.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am schnellsten abgebaut wird.

5 2.3 Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente s an den Graphen von g im Punkt $P(6; g(6))$ beschrieben. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente s und berechnen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

3 2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $k: t \mapsto k(t)$, die die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten innerhalb der ersten 9 Stunden nach der Einnahme beschreibt.

4 2.5 Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren den Zeitpunkt, zu dem sich die Konzentration des Medikaments im Blut auf die Hälfte der maximalen Konzentration reduziert hat. Benutzen Sie als Startwert $t_0 = 5$ und führen Sie einen Näherungsschritt aus.

70