2012 A I Lösung

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$ in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.
6	1.1	Zeigen Sie, dass gilt: $\mathbb{D}_f =]-2; 0[\cup]0; 2[$

$f(x) = \ln \frac{-2x^2}{x^2-4}$ Es muss gelten: $g(x) = \frac{-2x^2}{x^2-4} > 0$

$-2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 2$

x		−2		0		2	
$-2x^2$	−		−	0	−		−
x^2-4	+	0	−		−	0	+
$g(x)$	−	n.d.	+	0	+	n.d.	−

$\mathbb{D}_f =]-2; 0[\cup]0; 2[$

3 1.2 Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems.

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = \ln \frac{-2(-x)^2}{(-x)^2-4} = \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} = f(x) \\ \mathbb{D}_f \text{ ist symmetrisch zu } x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow G_f \text{ ist achsensymmetrisch zur } y-\text{Achse}$$

4 1.3 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

$$f(x) = \ln \frac{-2x^2}{x^2-4} = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2}{x^2-4} = 1 \Rightarrow -2x^2 = x^2 - 4$$

$$\Rightarrow -3x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

5 1.4 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to 0$, für $x \to -2$ und für $x \to 2$.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln \underbrace{\frac{\overset{0^-}{-2x^2}}{\underset{-4}{x^2-4}}}_{0^+} \to -\infty \qquad \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) \to -\infty \ (\text{Begr.: Symmetrie})$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \ln \underbrace{\frac{\overset{-8}{-2x^2}}{\underset{0^-}{x^2-4}}}_{\infty} \to \infty \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) \to \infty \ (\text{Begr.: Symmetrie})$$

4 1.5 Geben Sie die Wertemenge der Funktion f sowie die Art und die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an.

$W = \mathbb{R}$

Senkrechte Asymptoten: $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$

7 1.6 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von f.

$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: f'(x) = \dfrac{8}{4x - x^3}\right]$

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{-2x^2} \cdot \frac{(x^2-4)\cdot(-4x) - (-2x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-2x)\left[(x^2-4)\cdot 2 + (-2x^2)\right]}{-2x^2(x^2-4)}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8 - 2x^2}{x(x^2-4)}$$

$$f'(x) = \frac{-8}{x(x^2-4)}$$

x	-2		0		2
-8		$-$		$-$	
x^2-4		$-$	0	$-$	
x		$-$		$+$	
$f'(x)$		$-$	n.d.	$+$	
G_f		$\searrow$	n.d.	$\nearrow$	

G_f ist streng monoton fallend für $x \in]-2; 0[$ und streng monoton steigend für $x \in]0; 2[$.

7 1.7 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f.

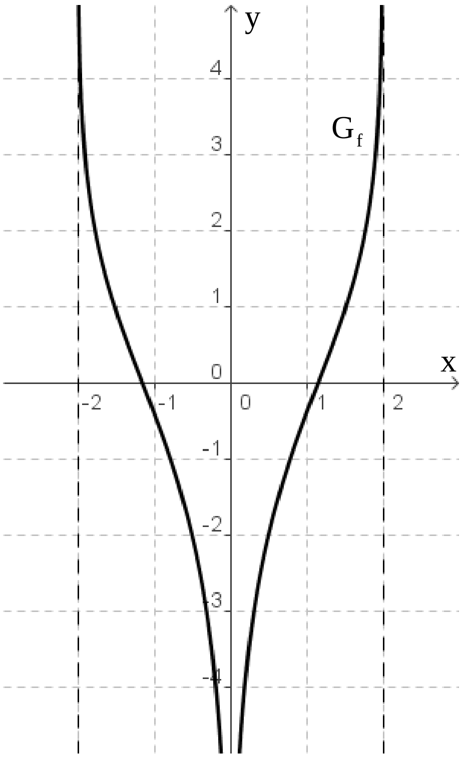
$$f'(x) = \frac{-8}{x(x^2-4)} = \frac{-8}{x^3-4x}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2-4)\cdot 0 - (-8)\cdot(3x^2-4)}{(x^3-4x)^2} = \frac{8\cdot(3x^2-4)}{x^2(x^2-4)^2} = 0$$

$$3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3} \quad \text{je}\,(1x) \quad \Rightarrow \quad \text{VZW} \quad \Rightarrow \quad \text{Käs} \quad \Rightarrow \quad \text{WP}$$

$WP_1\left(-\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,|\,0\right)$ $WP_2\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,|\,0\right)$ (Nullstellen von f, siehe 1.3)

4 | 1.8 Zeichnen Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse den Graphen von f mit seinen Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: $1\text{LE} = 1\text{cm}$



9 | 1.9 Gegeben sei nun die Funktion $F: x \mapsto 2\cdot\ln(2-x) - 2\cdot\ln(2+x) + x\cdot\ln\frac{-2x^2}{x^2-4}$ mit $\mathbb{D}_F = \mathbb{D}_f$. Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist. Markieren Sie das von der x-Achse, der Geraden mit der Gleichung $x = 0{,}5$ und dem Graphen von f eingeschlossene, endliche Flächenstück im Schaubild der Aufgabe 1.8 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl A. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen

$$F'(x) = \frac{-2}{2-x} - \frac{2}{2+x} + 1\cdot\ln\frac{-2x^2}{x^2-4} + x\cdot\frac{-8}{x(x^2-4)}$$

$$F'(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{-8}{x^2-4} + \ln\frac{-2x^2}{x^2-4}$$

$$F'(x) = \frac{2(x+2)-2(x-2)-8}{x^2-4} + \ln\frac{-2x^2}{x^2-4}$$

$$F'(x) = \frac{2x+4-2x+4-8}{x^2-4} + \ln\frac{-2x^2}{x^2-4}$$

$$F'(x) = \frac{0}{x^2-4} + \ln\frac{-2x^2}{x^2-4}$$

$$F'(x) = \ln\frac{-2x^2}{x^2-4} = f(x)$$

Da die Fläche unterhalb der x – Achse liegt:

$$A = \int_{\frac{2}{3}\sqrt{3}}^{0,5} f(x)\,dx$$

$$A = \left[2\cdot\ln(2-x) - 2\cdot\ln(2+x) + x\cdot\ln\tfrac{-2x^2}{x^2-4}\right]_{\frac{2}{3}\sqrt{3}}^{0,5}$$

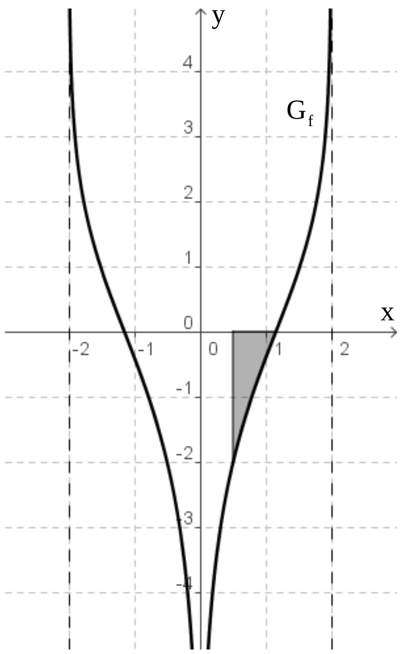
$$= 2\cdot\ln(2-0,5) - 2\cdot\ln(2+0,5) + 0,5\cdot\ln\tfrac{-2\cdot 0,5^2}{0,5^2-4}$$

$$-\left[2\cdot\ln\left(2-\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\right) - 2\cdot\ln\left(2+\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\right) + \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\ln\frac{-2\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2-4}\right]$$

$$= 2\cdot\ln 1,5 - 2\cdot\ln 2,5 + 0,5\cdot\ln\tfrac{2}{15}$$

$$-\left[2\cdot\ln\tfrac{2-\frac{2}{3}\sqrt{3}}{2+\frac{2}{3}\sqrt{3}} + \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\ln 1\right]$$

$$= 2\cdot\ln\tfrac{3}{5} + 0,5\cdot\ln\tfrac{2}{15} - 2\cdot\ln\left(2-\sqrt{3}\right) \approx 0,605$$



2.0 Die Halbwertszeit T_A eines radioaktiven Elements A, also die Zeit, nach der die Hälfte der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen $N_{a_0} = 1,75\cdot 10^4$ Atome zerfallen ist, beträgt $134\,s$. Für die zur Zeit t nicht zerfallenen Atome gilt das Zerfallsgesetz:

$$N_A(t) = N_{A_0}\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A}\cdot t}$$

5 2.1 Berechnen Sie die sog. „mittlere Lebensdauer“ τ, d.h. die Zeit τ, für die gilt:

$$N_A(\tau) = \frac{N_{A_0}}{e}$$

$$N_A(\tau) = \frac{N_{A_0}}{e}$$

$$N_{A_0}\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A}\cdot\tau} = N_{A_0}\cdot e^{-1}$$

$$e^{-\frac{\ln 2}{T_A}\cdot\tau} = e^{-1}$$

$$-\frac{\ln 2}{T_A}\cdot\tau = -1$$

$$\tau = \frac{T_A}{\ln 2} = \frac{134\,s}{\ln 2} \approx 193\,s$$

3 2.2 Zeigen Sie ausgehend vom Zerfallsgesetz, dass folgende Beziehung gilt:

$$\frac{\dot{N}_A(t)}{N_A(t)} = -\frac{\ln 2}{T_A}$$

$\dot{N}_A(t)$ bedeutet dabei die Ableitung von $N_A(t)$ nach der Zeit t.

$$N_A(t) = N_{A_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \dot{N}_A(t) = N_{A_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A} \cdot t} \cdot \left(-\frac{\ln 2}{T_A}\right) = N_A(t) \cdot \left(-\frac{\ln 2}{T_A}\right)$$

$$\frac{\dot{N}_A(t)}{N_A(t)} = \frac{N_A(t) \cdot \left(-\frac{\ln 2}{T_A}\right)}{N_A(t)} = -\frac{\ln 2}{T_A}$$

2.3.0 Für ein Stoffgemisch zweier radioaktiver Elemente B und C mit den Halbwertszeiten T_B bzw. T_C gelten folgende Beziehungen:

- $N_{BC}(t) = N_B(t) + N_C(t)$
- Zur Zeit $t = 0$ ist die Anzahl der vorhandenen Atome N_{C_0} des Elements C doppelt so groß wie die Anzahl der vorhandenen Atome N_{B_0} des Elements B.
- Die Halbwertszeit des Elements B ist nur halb so groß wie die des Elements C.
- Beim Zerfall des Elements B entsteht nicht das Element C und beim Zerfall des Elements C entsteht nicht das Element B.

6 2.3.1 Zeigen Sie, dass für die Halbwertszeit T_{BC} des Stoffgemisches folgende Gleichung gilt:

$$e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot T_{BC} \cdot 2} + 2e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot T_{BC}} = 1{,}5$$

Aus den Angaben in 2.3.0 resultieren folgende Gleichungen:

$(1) \quad N_{BC}(t) = N_B(t) + N_C(t)$

$(2) \quad N_{C_0} = 2 \cdot N_{B_0}$

$(3) \quad T_B = \frac{1}{2} T_C$

Aus (1) folgt:

$$N_{BC}(t) = N_B(t) + N_C(t)$$

$$\left(N_{B_0} + N_{C_0}\right) \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{BC}} \cdot t} = N_{B_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_B} \cdot t} + N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot t}$$

Für $t = T_{BC}$ gilt dann:

$$\left(N_{B_0} + N_{C_0}\right) \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{BC}} \cdot T_{BC}} = N_{B_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_B} \cdot T_{BC}} + N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot T_{BC}}$$

$$\left(N_{B_0} + N_{C_0}\right) \cdot e^{-\ln 2} = N_{B_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_B} \cdot T_{BC}} + N_{C_0} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C} \cdot T_{BC}}$$

Nun noch Glg. (2) und (3) eingesetzt und etwas umgeformt:

$$\left(N_{B_0}+2N_{B_0}\right)\cdot e^{-\ln 2}=N_{B_0}\cdot e^{-\frac{\ln 2}{\frac{1}{2}T_C}\cdot T_{BC}}+2\cdot N_{B_0}\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}}$$

$$3N_{B_0}\cdot\tfrac{1}{2}=N_{B_0}\cdot\left(e^{-2\cdot\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}}+2\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}}\right)$$

$$1{,}5=e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}\cdot 2}+2\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}}$$

7 2.3.2 Zeigen Sie, dass $\dfrac{T_{BC}}{T_C}$ konstant ist und berechnen Sie den Wert dieser Konstanten auf zwei Nachkommastellen genau.

$$\left[\text{Hinweis: Benutzen Sie die Substitution } u=e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}}\right]$$

Obige Gleichung nun noch ein wenig weiter umgeformt (mit Hilfe des 5. Potenzgesetzes):

$$\left(e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}}\right)^2+2\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}}-1{,}5=0$$

Mit Hilfe der angegebenen Substitution $u=e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}}$ erhält man schließlich:

$$u^2+2u-1{,}5=0$$

$$u_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+6}}{2}=-1\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{10}=\begin{cases}-1+\frac{1}{2}\sqrt{10}\\-1-\frac{1}{2}\sqrt{10}\end{cases}$$

Rücksubstitution:

$$e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}}=-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{10} \qquad\qquad e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}}=\underbrace{-1-\tfrac{1}{2}\sqrt{10}}_{<0}$$

$$-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}=\ln\left(-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{10}\right) \qquad\qquad \text{n.d.}$$

$$\frac{T_{BC}}{T_C}=\frac{\ln\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)}{-\ln 2}\approx 0{,}783$$

70