2012 A I Angabe

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \ln\frac{-2x^2}{x^2-4}$ in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.
6	1.1	Zeigen Sie, dass gilt: $\mathbb{D}_f =]-2;0[\,\cup\,]0;2[$
3	1.2	Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems.
4	1.3	Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.
5	1.4	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to 0$, für $x \to -2$ und für $x \to 2$.
4	1.5	Geben Sie die Wertemenge der Funktion f sowie die Art und die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an.
7	1.6	Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von f. $\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: f'(x) = \frac{8}{4x-x^3}\right]$
7	1.7	Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f.
4	1.8	Zeichnen Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse den Graphen von f mit seinen Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: $1\text{LE} = 1\text{cm}$
9	1.9	Gegeben sei nun die Funktion $F: x \mapsto 2\cdot\ln(2-x) - 2\cdot\ln(2+x) + x\cdot\ln\frac{-2x^2}{x^2-4}$ mit $\mathbb{D}_F = \mathbb{D}_f$. Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist. Markieren Sie das von der x-Achse, der Geraden mit der Gleichung $x = 0{,}5$ und dem Graphen von f eingeschlossene, endliche Flächenstück im Schaubild der Aufgabe 1.8 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl A. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen
	2.0	Die Halbwertszeit T_A eines radioaktiven Elements A, also die Zeit, nach der die Hälfte der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen $N_{a_0} = 1{,}75\cdot 10^4$ Atome zerfallen ist, beträgt $134\,\text{s}$. Für die zur Zeit t nicht zerfallenen Atome gilt das Zerfallsgesetz: $N_A(t) = N_{A_0}\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A}\cdot t}$
5	2.1	Berechnen Sie die sog. „mittlere Lebensdauer“ τ, d.h. die Zeit τ, für die gilt: $N_A(\tau) = \frac{N_{A_0}}{e}$
3	2.2	Zeigen Sie ausgehend vom Zerfallsgesetz, dass folgende Beziehung gilt:

$$\frac{\dot{N}_A(t)}{N_A(t)} = -\frac{\ln 2}{T_A}$$

$\dot{N}_A(t)$ bedeutet dabei die Ableitung von $N_A(t)$ nach der Zeit t.

2.3.0 Für ein Stoffgemisch zweier radioaktiver Elemente B und C mit den Halbwertszeiten T_B bzw. T_C gelten folgende Beziehungen:

- $N_{BC}(t) = N_B(t) + N_C(t)$
- Zur Zeit $t = 0$ ist die Anzahl der vorhandenen Atome N_{C_0} des Elements C doppelt so groß wie die Anzahl der vorhandenen Atome N_{B_0} des Elements B.
- Die Halbwertszeit des Elements B ist nur halb so groß wie die des Elements C.
- Beim Zerfall des Elements B entsteht nicht das Element C und beim Zerfall des Elements C entsteht nicht das Element B.

6 2.3.1 Zeigen Sie, dass für die Halbwertszeit T_{BC} des Stoffgemisches folgende Gleichung gilt:

$$e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}\cdot 2} + 2e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}} = 1{,}5$$

7 2.3.2 Zeigen Sie, dass $\frac{T_{BC}}{T_C}$ konstant ist und berechnen Sie den Wert dieser Konstanten auf zwei Nachkommastellen genau.

$$\left[\text{Hinweis: Benutzen Sie die Substitution } u = e^{-\frac{\ln 2}{T_C}\cdot T_{BC}}\right]$$

70