

2011 B II Lösung

BE 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 sind die Punkte $P(1; 0; 0)$, $Q(0; 1; 0)$, $R(0; 0; 1)$ und $S_k(k; k; k)$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben.

6 1.1 Berechnen Sie die Werte des Parameters k , für die die gegebenen Punkte eine dreiseitige Pyramide aufspannen.

Die vier Punkte bilden keine dreiseitige Pyramide, wenn die Vektoren \overline{PQ} , \overline{PR} und \overline{PS}_k linear abhängig sind, also wenn gilt:

$$\det(\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}_k) = 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-1 \\ k \\ k \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & k-1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$0 + 0 + (k-1) - 0 - (-k) - (-k) = 0$$

$$3k - 1 = 0$$

$$k = \frac{1}{3}$$

Somit bilden die Punkte eine dreiseitige Pyramide für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$

6 1.2 Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters k die Pyramide ein reguläres Tetraeder, also eine gleichseitige Pyramide ist.

Es müssen also alle sechs Kanten gleich lang sein; also muss gelten:

$$|\overline{PQ}| = |\overline{PR}| = |\overline{PS}_k| = |\overline{QR}| = |\overline{QS}_k| = |\overline{RS}_k|$$

$$|\overline{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

$$|\overline{PR}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

$$|\overline{QR}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

$$|\overline{PS}_k| = \left| \begin{pmatrix} k-1 \\ k \\ k \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(k-1)^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{3k^2 - 2k + 1}$$

$$|\overline{QS_k}| = \begin{vmatrix} k \\ k-1 \\ k \end{vmatrix} = \sqrt{3k^2 - 2k + 1}$$

$$|\overline{RS_k}| = \begin{vmatrix} k \\ k \\ k-1 \end{vmatrix} = \sqrt{3k^2 - 2k + 1}$$

Somit folgt: $\sqrt{3k^2 - 2k + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow 3k^2 - 2k + 1 = 2 \Rightarrow 3k^2 - 2k - 1 = 0$

$$k_{\frac{1}{2}} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

2.0 Methan CH_4 ist eine Kohlenwasserstoffverbindung. Das Molekül hat die Form eines regulären Tetraeders, in dessen Ecken sich die H-Atome befinden. Das C-Atom liegt im Punkt C, gleich weit von allen H-Atomen entfernt. Der Punkt C teilt die Höhe des Tetraeders im Verhältnis 3:1. Die Ecken des Tetraeders, also die Lage der H-Atome, seien die Punkte aus 1.0 mit $k=1$, also $P(1; 0; 0)$, $Q(0; 1; 0)$, $R(0; 0; 1)$ und $S_1(1; 1; 1)$.

3 2.1 Die Punkte P, Q und S_1 liegen in einer Ebene F. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform.

[Mögliches Ergebnis: $F: x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$]

$$\vec{n}_F = \overline{PQ} \times \overline{PS_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - (-1) \\ -1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit folgt:

$$F: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 - 1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$F: x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$$

3 2.2 Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders PQS_1R .

Für das Volumen des Tetraeders PQS_1R gilt:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \det(\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS_k}) = \frac{1}{6} \cdot (3k - 1) \stackrel{k=1}{=} \frac{1}{6} \cdot (3 - 1) = \frac{1}{3} \quad (\text{vgl. 1.1})$$

- 4 2.3 Der Punkt T ist der Fußpunkt des vom Punkt R auf die Ebene F gefällten Lotes. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T.

[Ergebnis: $T\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$]

Man bildet hier eine Gerade durch den Punkt R mit dem Normalenvektor \vec{n}_F

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und setzt diese in die Ebene F ein:

$$F: \mu + \mu - (1 - \mu) - 1 = 0 \Rightarrow 3\mu - 2 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{2}{3}$$

das nun wieder in die Geradengleichung eingesetzt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow T\left(\frac{2}{3} \mid \frac{2}{3} \mid \frac{1}{3}\right)$$

- 4 2.4 Berechnen Sie die Koordinaten des C-Atoms.

[Ergebnis: $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$]

Der Punkt C liegt auf der Strecke $[RT]$ und teilt diese im Verhältnis 3:1 (liegt näher an

T), also gilt: $\overline{RC} : \overline{CT} = 3 : 1$

Somit folgt: $\overline{RC} = 3 \cdot \overline{CT}$

$$\vec{c} - \vec{r} = 3 \cdot (\vec{t} - \vec{c})$$

$$\vec{c} - \vec{r} = 3\vec{t} - 3\vec{c}$$

$$4\vec{c} = 3\vec{t} + \vec{r}$$

$$\vec{c} = \frac{1}{4} \cdot (3\vec{t} + \vec{r})$$

$$\vec{c} = \frac{1}{4} \cdot \left(3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\right)$$

4 | 2.5 Bestimmen Sie den Winkel ρ zwischen zwei C-H-Bindungen, also z.B. den Winkel PCS_1 .

Für den Winkel ρ gilt:

$$\cos \rho = \frac{\overline{\text{CS}_1} \cdot \overline{\text{CP}}}{|\overline{\text{CS}_1}| \cdot |\overline{\text{CP}}|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \rho \approx 109,5^\circ$$

30