

2011 B I Angabe

BE 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 sind in Abhängigkeit der Variablen

$p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix}$ gegeben.

2 1.1 Zeigen Sie, dass unabhängig von der Wahl der Werte für p und q die Vektoren \vec{a} und \vec{b} senkrecht aufeinander stehen.

Die Vektoren stehen aufeinander senkrecht, wenn gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix} = (p-q)^2 + (-p) \cdot p + q \cdot (2p-q) = p^2 - 2pq + q^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 0$$

1.2.0 Setzen Sie nun $p=2$ und $q=1$. Daraus ergeben sich mit dem Koordinatenursprung O die Ortsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ für die Punkte A und B .

Also erhält man: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $A(1|-2|1)$ und $B(1|2|3)$

3 1.2.1 Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene E , in der die Punkte A und B sowie der Koordinatenursprung O liegen. Geben Sie die Ebene E auch in Koordinatenform an.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 - (-2 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

7 1.2.2 Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs O von der durch den Punkt A und B festgelegten Geraden g .

Bestimmen Sie auch den Punkt L auf der Geraden g , der die geringste Entfernung vom Ursprung hat.

[Teilergebnis: $L(1; -0,8; 1,6)$]

Man stellt zunächst die Gleichung der Geraden g auf.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Der Verbindungsvektor vom Ursprung zum Lotfußpunkt L (der Punkt der Gerade, der

auch den geringsten Abstand vom Ursprung hat) muss senkrecht auf der Geraden stehen, somit gilt:

$$\overline{OL} \circ \vec{u}_g = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2+4\lambda \\ 1+2\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$1 \cdot 0 + 4(-2+4\lambda) + 2(1+2\lambda) = 0$$

$$-8 + 16\lambda + 2 + 4\lambda = 0$$

$$20\lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = 0,3$$

Somit folgt für den Lotfußpunkt L:

$$\overline{OL} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+4 \cdot 0,3 \\ 1+2 \cdot 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,6 \end{pmatrix} \Rightarrow L(1|0,8|1,6)$$

Und jetzt noch den Abstand:

$$d = |\overline{OL}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-0,8)^2 + 1,6^2} = \sqrt{4,2}$$

- 9 1.2.3 Die Punkte S_1 und S_2 liegen auf der Geraden g . Die Strecke $[S_1S_2]$ bildet die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Koordinatenursprung O als Spitze. Dieses Dreieck besitzt die Flächenmaßzahl $A_\Delta = 2 \cdot \sqrt{4,2}$. Fertigen Sie eine Lageskizze der Punkte O, A, B, L, S_1 und S_2 an und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 . Runden Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 auf zwei Stellen nach dem Komma.

[Zwischenergebnis: $|\overline{LS_1}| = 2$]

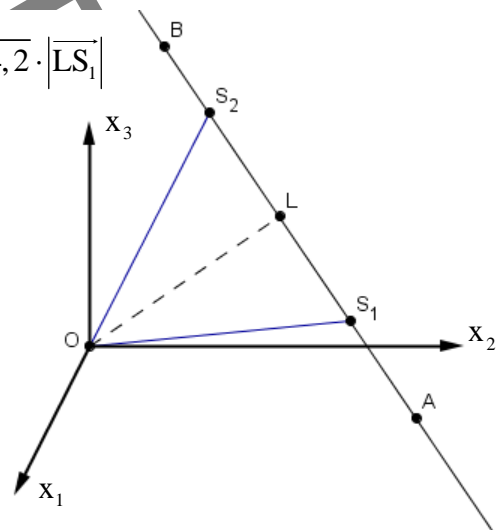
Für die Fläche des Dreiecks OS_1S_2 gilt:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |\overline{OL}| \cdot |\overline{S_1S_2}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4,2} \cdot 2 \cdot |\overline{LS_1}| = \sqrt{4,2} \cdot |\overline{LS_1}|$$

Da aber nach Angabe auch gilt: $A_\Delta = 2 \cdot \sqrt{4,2}$

Muss gelten: $|\overline{LS_1}| = 2$

Das sind also alle Punkte auf der Geraden, welche auf der Geraden g liegen und von L den Abstand 2 haben. Nimmt man für den Punkt S_1 den allgemeinen Geradenpunkt her, so folgt:



$$|\overline{LS}_1| = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2+4\lambda \\ 1+2\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,6 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4\lambda - 1,2 \\ 2\lambda - 0,6 \end{pmatrix} = 2$$

$$\sqrt{0^2 + (4\lambda - 1,2)^2 + (2\lambda - 0,6)^2} = 2 \quad |(\dots)^2$$

$$16\lambda^2 - 9,6\lambda + 1,44 + 4\lambda^2 - 2,4\lambda + 0,36 = 4$$

$$20\lambda^2 - 12\lambda - 2,2 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-2,2)}}{2 \cdot 20} = \frac{12 \pm \sqrt{320}}{40} = \frac{12 \pm 8\sqrt{5}}{40} = \frac{3 \pm 2\sqrt{5}}{10}$$

Diese beiden Werte für λ nun wieder in die Geradengleichung eingesetzt, erhält man die beiden Punkte S_1 und S_2 :

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3+2\sqrt{5}}{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,99 \\ 2,49 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(1|0,99|2,49)$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3-2\sqrt{5}}{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2,59 \\ 0,71 \end{pmatrix} \Rightarrow S_2(1|-2,59|0,71)$$

2.0 Die folgenden Gleichungen I, II und III stellen jeweils Ebenen in Koordinatenform dar:

I $x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$

II $x_2 + x_3 = 1$

III $2x_1 - x_2 + x_3 = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$.

4 2.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von c die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rcl} \text{I} & x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 & \cdot 2 \\ \text{II} & x_2 + x_3 = 1 & - \\ \text{III} & 2x_1 - x_2 + x_3 = c & \leftarrow \\ \hline & x_2 + x_3 = 1 & \cdot 3 \\ & 3x_2 - 3x_3 = 6 - c & \leftarrow \\ \hline & 0 = -3 + c & \end{array}$$

Für $c = 3$ erhält man in der letzten Zeile eine wahre Aussage (Nullzeile), das Gleichungssystem hat somit unendlich viele Lösungen.

Für $c \neq 3$ erhält man in der letzte Zeile eine falsche Aussage, das Gleichungssystem hat somit keine Lösung.

5 2.2 Bestimmen Sie für $c = 3$ die Lösung des Gleichungssystems und interpretieren Sie die gegenseitige Lage der drei Ebenen.

Falls $c = 3$ ist, dann wählt man $x_3 = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die zweite Zeile liefert dann: $x_2 + \lambda = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - \lambda$

und eingesetzt in die erste Zeile: $x_1 + 1 - \lambda + 2 \cdot \lambda = 3 \Rightarrow x_1 = 2 - \lambda$

Die drei Ebenen schneiden sich somit in einer Gerade, für die Gleichung der Geraden s folgt dann:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$