

## 2011 A II Lösung

BE 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion  $f : x \mapsto \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}$  mit  $x \in \mathbb{R}$ .

5

1.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte  $f(x)$  für  $|x| \rightarrow \infty$  und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{3+e^{2x}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{1+e^{2x}}_{\rightarrow 0}} = 3$$

Waagrechte Asymptote:  $y_1 = 3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{3+e^{2x}}^{\rightarrow \infty}}{\underbrace{1+e^{2x}}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1$$

Waagrechte Asymptote:  $y_2 = 1$

3

1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  keine Nullstellen und ihr Graph keine Extrempunkte besitzt.

$$\left[ \text{Teilergebnis: } f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \right]$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}} = 0 \Rightarrow 3+e^{2x} = 0 \Rightarrow e^{2x} = -3 \text{ nicht möglich!}$$

Somit hat die Funktion  $f$  keine Nullstellen.

$$f'(x) = \frac{(1+e^{2x}) \cdot 2e^{2x} - (3+e^{2x}) \cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{2e^{2x} + 2e^{4x} - 6e^{2x} - 2e^{4x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} < 0$$

für alle  $x \in \mathbb{D}$ .

Somit hat der Graph der Funktion  $f$  keine Extrema.

Der Graph der Funktion  $f$  ist streng monoton fallend für  $x \in \mathbb{D}$

9 1.3 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von  $f$ , ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes  $W$  und stellen Sie die Gleichung der Tangente  $w$  an den Graphen von  $f$  im Wendepunkt  $W$  auf.

[Teilergebnis:  $W(0; 2)$ ]

$$f''(x) = \frac{(1+e^{2x})^2 \cdot (-8e^{2x}) - (-4e^{2x}) \cdot 2(1+e^{2x}) \cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^4}$$

$$f''(x) = \frac{(1+e^{2x}) \cdot [(1+e^{2x}) \cdot (-8e^{2x}) - (-4e^{2x}) \cdot 2 \cdot 2e^{2x}]}{(1+e^{2x})^4}$$

$$f''(x) = \frac{-8e^{2x} - 8e^{4x} + 16e^{4x}}{(1+e^{2x})^3}$$

$$f''(x) = \frac{8e^{4x} - 8e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}$$

$$f''(x) = \frac{8e^{2x} \cdot (e^{2x} - 1)}{(1+e^{2x})^3} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow x_w = 0$$

	0	
	x	
$8e^{2x}$	+	+
$e^{2x} - 1$	-	+
$(1+e^{2x})^3$	+	+
$f''(x)$	-	+
$G_f$	rk	lk

$G_f$  ist rechtsgekrümmt für  $x \in ]-\infty; 0]$

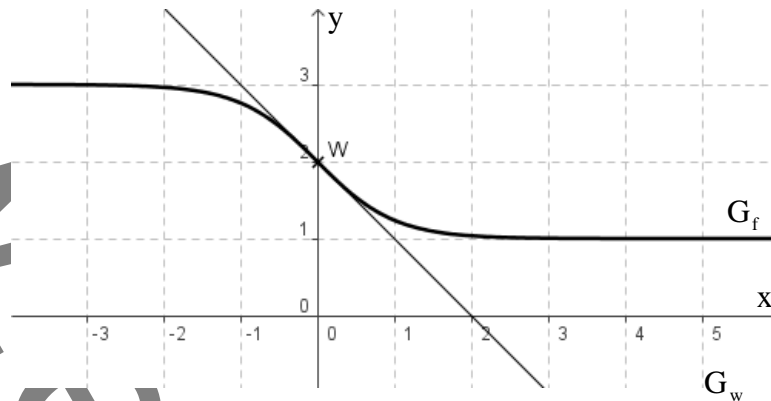
$G_f$  ist linksgekrümmt für  $x \in [0; \infty[$

$$f(0) = \frac{3+e^{2 \cdot 0}}{1+e^{2 \cdot 0}} = 2 \Rightarrow \text{WP}(0|2)$$

$$f'(0) = \frac{-4e^{2 \cdot 0}}{(1+e^{2 \cdot 0})^2} = \frac{-4}{(1+1)^2} = -1$$

Dann folgt für die Wendetangente:  $w : x = -x + 2$

- 4 1.4 Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  mit der Tangente  $w$  für  $-3 \leq x \leq 5$  in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab 1 LE = 1 cm .



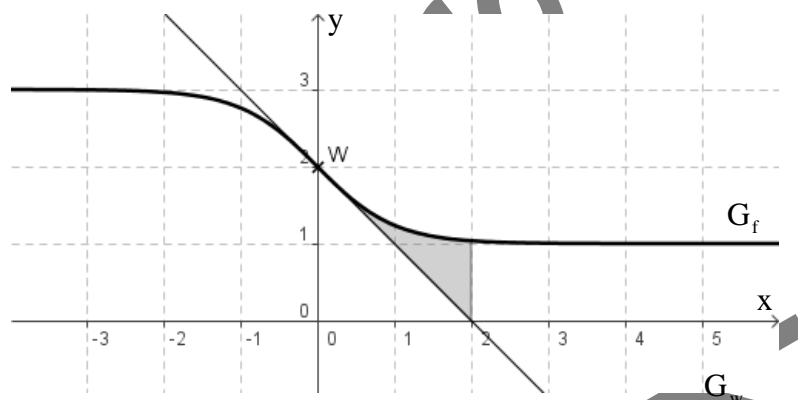
- 3 1.5 Zeigen Sie, dass die Funktion  $F: x \mapsto 3x - \ln(1 + e^{2x})$ ,  $x \in \mathbb{R}$  eine Stammfunktion der Funktion  $f$  ist.

$$F'(x) = 3 - \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{3 \cdot (1+e^{2x}) - 2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{3+3e^{2x} - 2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}} = f(x)$$

Somit ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ .

- 1.6.0 Der Graph von  $f$ , die Tangente  $w$  und die Gerade mit der Gleichung  $x = u$  mit  $u \in \mathbb{R}$  und  $u \geq 2$  schließen ein Flächenstück  $A_u$  ein.

- 4 1.6.1 Kennzeichnen Sie für  $u = 2$  das Flächenstück  $A_2$  im Schaubild der Aufgabe 1.4 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl  $A$ .  
[Teilergebnis :  $A \approx 0,675$ ]



$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (f(x) - w(x)) dx = \int_0^2 \left( \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}} - (-x+2) \right) dx = \left[ 3x - \ln(1+e^{2x}) + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_0^2 = \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(1+e^{2x}) \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 - \ln(1+e^4) + \ln(1+e^{2 \cdot 0}) = 4 - \ln(1+e^4) + \ln(2) \\ A &\approx 0,675 \end{aligned}$$

- 6 1.6.2 Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren  $u$  näherungsweise so, dass das Flächenstück  $A_u$  gleich große Flächenanteile oberhalb und unterhalb der  $x$ -Achse besitzt. Benutzen Sie  $u_0 = 4$  als Startwert und führen Sie einen Näherungsschritt aus.

Damit die beiden Flächenanteile gleich groß sind, muss gelten:

$$A_{\text{oberhalb der } x\text{-Achse}} = A_{\text{unterhalb der } x\text{-Achse}}$$

$$0,675 + \int_2^u f(x) dx = \int_2^u (0 - w(x)) dx$$

$$0,675 + \int_2^u \frac{3 + e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx = \int_2^u (x - 2) dx$$

$$0,675 + \left[ 3x - \ln(1 + e^{2x}) \right]_2^u = \left[ \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_2^u$$

$$0,675 + 3u - \ln(1 + e^{2u}) - (6 - \ln(1 + e^4)) = \frac{1}{2}u^2 - 2u - (\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot 2)$$

$$0,675 + 3u - \ln(1 + e^{2u}) - 6 + \ln(1 + e^4) = \frac{1}{2}u^2 - 2u + 2$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}u^2 + 5u - \ln(1 + e^{2u}) + \ln(1 + e^4) - 7,325}_{=J(u)} = 0$$

Also hat man zu lösen:  $J(u) = -\frac{1}{2}u^2 + 5u - \ln(1 + e^{2u}) + \ln(1 + e^4) - 7,325 = 0$

Nun benötigt man noch  $\frac{dJ(u)}{du} = -u + 5 - \frac{2e^{2u}}{1 + e^{2u}}$

Mit dem Startwert  $u_0 = 4$  folgt dann:

$$u_1 = u_0 - \frac{J(u_0)}{\frac{dJ(u_0)}{du}} = 4 - \frac{J(4)}{\frac{dJ(4)}{du}} = 4 - \frac{-\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 - \ln(1 + e^{2 \cdot 4}) + \ln(1 + e^4) - 7,325}{-4 + 5 - \frac{2e^{2 \cdot 4}}{1 + e^{2 \cdot 4}}} \approx 4,69$$

- 2.0 Gegeben ist ferner in der maximalen Definitionsmenge  $ID_g$  eine Funktion  $g: x \mapsto a \cdot \ln(bx + c) + 2$ , bei der die reellen, von Null verschiedenen Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  dadurch festgelegt sind, dass der Graph dieser Funktion durch den Punkt  $P(0; 2)$  verläuft, dort die Steigung 1 und an der Stelle  $x_0 = -1$  die Steigung 3 besitzt.

- 6 2.1 Berechnen Sie die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$ .  
[Teilergebnis:  $a = \frac{3}{2}$ ;  $b = \frac{2}{3}$ ;  $c = 1$ ]

$$g(x) = a \cdot \ln(bx + c) + 2 \Rightarrow g'(x) = a \cdot \frac{b}{bx + c} = \frac{a \cdot b}{bx + c}$$

Nun gilt:

$$g(0) = a \cdot \ln(b \cdot 0 + c) + 2 = a \cdot \ln(c) + 2 = 2 \Rightarrow a \cdot \ln(c) = 0 \Rightarrow \ln(c) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c = 1}}$$

$$g'(0) = \frac{a \cdot b}{b \cdot 0 + 1} = ab = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b} \quad (\text{da } b \neq 0)$$

$$g'(-1) = \frac{ab}{-b + 1} = \frac{\frac{1}{b} \cdot b}{-b + 1} = \frac{1}{1 - b} = 3 \Rightarrow 1 - b = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{b = \frac{2}{3}}} \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{3}{2}}}$$

Somit erhält man:  $g(x) = \frac{3}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{3}x + 1\right) + 2$

2 2.2 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge  $ID_g$ .

Es muss gelten:  $\frac{2}{3}x + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x > -1 \Rightarrow x > -\frac{3}{2} \Rightarrow ID_g = ]-\frac{3}{2}; \infty[$

3 2.3 Zeigen Sie, dass die Funktion  $g$  streng monoton ist.

$$g'(x) = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}x + 1} = \frac{1}{\frac{2}{3}x + 1} > 0 \text{ für alle } x \in ]-\frac{3}{2}; \infty[$$

Somit ist  $g$  für alle  $x \in ID_g$  streng monoton steigend.

8 2.4 Untersuchen Sie, ob die Funktion  $h$  mit

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x < 0 \text{ (siehe Aufgabe 1.0)} \\ g(x) & \text{für } x \geq 0 \text{ (siehe Aufgabe 2.0)} \end{cases}$$

an der Nahtstelle  $x = 0$  stetig ist, begründen Sie, dass die Funktionswerte von  $h$  an der Nahtstelle ein Minimum aufweisen, und geben Sie den Winkel an, unter dem die Graphen der beiden Teilfunktionen an der Nahtstelle aufeinandertreffen.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3 + e^{2x}}{1 + e^{2x}} & \text{für } x < 0 \\ \frac{3}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{3}x + 1\right) + 2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 + e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + e^{2(0-h)}}{1 + e^{2(0-h)}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + e^{-2h}}{1 + e^{-2h}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{3}x + 1\right) + 2\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{3} \cdot (0+h) + 1\right) + 2\right) = \frac{3}{2} \cdot \ln(1) + 2 = 2$$

$$h(0) = \frac{3}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{3} \cdot 0 + 1\right) + 2 = 2$$

Somit ist die Funktion  $h$  an der Nahtstelle  $x_0 = 0$  stetig.

Nach Aufgabe 1.2 ist der Graph der Funktion  $f$  und somit auch  $G_h$  streng monoton fallend für alle  $x \leq 0$ .

Nach Aufgabe 2.3 ist der Graph der Funktion  $g$  und somit auch  $G_h$  streng monoton steigend für alle  $x \geq 0$ .

Dann muss aber der Graph der Funktion an der Stelle  $x_0 = 0$  ein absolutes Minimum haben.

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{-4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{\frac{2}{3}x + 1} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4e^{2(0-h)}}{(1 + e^{2(0-h)})^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4e^{-2h}}{(1 + e^{-2h})^2} = \frac{-4}{2^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2}{3}x + 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot (0 + h) + 1} = 1$$

Aufgrund der beiden Werte für die Steigungen an der Stelle  $x_0 = 0$  folgt, dass die Graphen der beiden Teilfunktionen unter einem Winkel von  $\rho = 90^\circ$  aufeinandertreffen.

- 3.0 Mit Hilfe einer Konvexlinse (Sammellinse) wird von einem selbstleuchtenden, links von der Linse stehenden Gegenstand auf einem Schirm rechts von der Linse ein reales, scharfes Bild erzeugt. Der Abstand des Gegenstands von der Linsenmitte heißt dabei Gegenstandsweite  $g$ , der Abstand des Schirms von der Linsenmitte heißt Bildweite  $b$ .

Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ist durch die Linsenformel  $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

gegeben, wobei mit  $f$  die Brennweite der Linse bezeichnet wird. Um ein reales Bild zu erzeugen, muss die Gegenstandsweite größer als die Brennweite sein.

Dieser Versuchsaufbau soll in einem Schaukasten einer Schule gezeigt werden. Die Brennweite der verwendeten Linse beträgt  $f = 50 \text{ mm}$ . Die Einheit kann für die Berechnungen weggelassen werden.

- 5 3.1 Zeigen Sie, dass für den gesamten Platzbedarf  $a = g + b$  in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite  $g$  folgender funktionaler Zusammenhang besteht:

$$a(g) = \frac{g^2}{g - 50}$$

$$\text{Es gilt: } \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{50} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{50} - \frac{1}{g} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{g - 50}{50g} \Rightarrow b = \frac{50g}{g - 50}$$

Somit folgt für  $a$ :

$$a(g) = g + b = g + \frac{50g}{g - 50} = \frac{g \cdot (g - 50)}{g - 50} + \frac{50g}{g - 50} = \frac{g^2 - 50g + 50g}{g - 50} = \frac{g^2}{g - 50}$$

- 4 3.2 Bestimmen Sie eine geeignete Definitionsmenge  $ID_a$ , wenn der Platzbedarf  $a$  durch die Länge des Schaukastens mit  $3000 \text{ mm}$  begrenzt ist.

$$a(g) = 3000$$

$$\frac{g^2}{g - 50} = 3000$$

$$g^2 = 3000 \cdot (g - 50)$$

$$g^2 = 3000g - 150000$$

$$g^2 - 3000g + 150000 = 0$$

$$g_{\frac{1}{2}} = \frac{3000 \pm \sqrt{3000^2 - 4 \cdot 150000}}{2} = \frac{3000 \pm \sqrt{8400000}}{2} \approx \begin{cases} 2949 \\ 51 \end{cases}$$

Somit folgt für die Definitionsmenge:  $ID_a = ]51; 2949[$

8 3.3 Beweisen Sie, dass es eine Gegenstandsweite  $g_0$  gibt, für die der Platzbedarf  $a$  minimal wird, berechnen Sie  $g_0$  sowie den minimalen Platzbedarf  $a(g_0)$  und ermitteln Sie, welcher besondere Zusammenhang zwischen  $g_0$  und der zugehörigen Bildweite  $b_0$  besteht.

$$a(g) = \frac{g^2}{g-50}$$

$$\frac{da(g)}{dg} = \frac{(g-50) \cdot 2g - g^2 \cdot 1}{(g-50)^2} = \frac{2g^2 - 100g - g^2}{(g-50)^2} = \frac{g^2 - 100g}{(g-50)^2} = \frac{g(g-100)}{(g-50)^2} = 0$$

$$g_1 = 100 \quad \text{und} \quad (g_2 = 0 \notin \text{ID}_a)$$

		0	100	g
g		-	+	+
g-100		-	-	+
$(g-50)^2$		+	+	+
$\frac{da(g)}{dg}$		+	-	+
			TP	

Somit hat die Funktion  $a$  für  $g_1 = 100$  den einzigen rel. Tiefpunkt (der zugleich absolutes Minimum ist).

$$a(100) = \frac{100^2}{100-50} = 200 = a_1$$

Nach 3.1 folgt dann:

$$b_1 = \frac{50 \cdot 100}{100-50} = 100 = a_1$$

Somit sind Gegenstandsweite  $g_1$  und Bildweite  $b_1$  gleich groß; die Linse befindet sich in diesem Fall genau zwischen Gegenstand und Bildschirm.