2011 A I Lösung

BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{x^2+2ax+1}{2x+4a}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_a$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_a bezeichnet.
4	1.1	Geben Sie $\mathbb{D}_a$ an und bestimmen Sie die Art der Definitionslücke.

$n(x)=2x+4a=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2a \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_a=\mathbb{R}\setminus\{-2a\}$

$z(-2a)=(-2a)^2+2a\cdot(-2a)+1=4a^2-4a^2+1=1\neq 0$

Somit hat man eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x=-2a$.

6 1.2 Ermitteln Sie, für welche Parameterwerte a die Funktion f_a zwei verschiedene Nullstellen, genau eine Nullstelle bzw. keine Nullstelle hat, und geben Sie die entsprechenden Nullstellen an.

$z(x)=x^2+2ax+1=0$

$$x_{1/2}=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2}=\frac{-2a\pm\sqrt{4\left(a^2-1\right)}}{2}=\frac{-2a\pm2\sqrt{a^2-1}}{2}=-a\pm\sqrt{a^2-1}$$

Die Anzahl der Nullstellen der Funktion f hängt somit von der Diskriminante $D=a^2-1$ ab.

Es gibt keine Nullstellen, falls $D=a^2-1<0$, also für $-1<a<1$.

Es gibt eine Nullstelle, falls $D=a^2-1=0$, also für

$a=-1 \quad \Rightarrow \quad x_1=-(-1)\pm\sqrt{0}=1\in\mathbb{D}_{-1}$

oder $a=1 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1\pm\sqrt{0}=-1\in\mathbb{D}_1$

Es gibt zwei Nullstellen, falls $D=a^2-1>0$, also für $a<-1$ oder $a>1$.

6 1.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $|x|\to\infty$ und bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_a.

Senkrechte Asymptote: $x=-2a$

$$\left(x^2+2ax+1\right):\left(2x+4a\right)=\tfrac{1}{2}x+\frac{1}{2x+4a}$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2+2ax} \\ \qquad\quad 1 \end{array}$$

Somit folgt: $f_a(x)=\tfrac{1}{2}x+\frac{1}{2x+4a}$

Der Graph hat eine schiefe Asymptote mit der Gleichung: $y=\tfrac{1}{2}x$

Für sein Grenzwertverhalten folgt:

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2x+4a}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\tfrac{1}{2x+4a}}_{=0} = \lim_{x\to-\infty}\left(\tfrac{1}{2}x\right) \to -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2x+4a}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \underbrace{\lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{2x+4a}}_{=0} = \lim_{x\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}x\right) \to \infty$$

8 1.4 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f_a und ermitteln Sie damit Art und Lage der Extrempunkte des Graphen G_a.

$$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: f_a'(x) = \frac{(x+2a)^2-1}{2(x+2a)^2}\right]$$

$$f_a(x) = \frac{x^2+2ax+1}{2x+4a}$$

$$f_a'(x) = \frac{(2x+4a)\cdot(2x+2a)-(x^2+2ax+1)\cdot 2}{(2x+4a)^2}$$

$$f_a'(x) = \frac{4x^2+4ax+8ax+8a^2-2x^2-4ax-2}{(2x+4a)^2}$$

$$f_a'(x) = \frac{2x^2+8ax+8a^2-2}{(2x+4a)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+8ax+8a^2-2=0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-8a\pm\sqrt{64a^2-8(8a^2-2)}}{4} = \frac{-8a\pm\sqrt{64a^2-64a^2+16}}{4} = \frac{-8a\pm4}{4} = -2a\pm1$$

Vorzeichentabelle:

		$-2a-1$		$-2a$		$-2a+1$		x
$2x^2+8ax+8a^2-2$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+4a)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f_a'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$	
G_a	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$		$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	
		HP		n.d.		TP		

G_a ist streng monoton steigend für alle $x \in]-\infty; -2a-1]$ und für $x \in [-2a+1; \infty[$

G_a ist streng monoton fallend für alle $x \in [-2a-1; -2a[$ und für $x \in]-2a; -2a+1]$

$$f_a(-2a-1) = \frac{(-2a-1)^2+2a\cdot(-2a-1)+1}{2\cdot(-2a-1)+4a} = \frac{4a^2+4a+1-4a^2-2a+1}{-4a-2+4a} = \frac{2a+2}{-2} = -a-1$$

$$f_a(-2a+1) = \frac{(-2a+1)^2+2a\cdot(-2a+1)+1}{2\cdot(-2a+1)+4a} = \frac{4a^2-4a+1-4a^2+2a+1}{-4a+2+4a} = \frac{-2a+2}{2} = -a+1$$

Somit folgt für die Koordinaten der Extrempunkte:

$H_a(-2a-1; -a-1)$ und $T_a(-2a+1; -a+1)$

3 1.5 Zeigen Sie, dass unabhängig von a der Tiefpunkt $T_a(-2a+1; -a+1)$ und der Hochpunkt $H_a(-2a-1; -a-1)$ des Graphen G_a immer denselben Abstand voneinander haben.

Für den Abstand der beiden Extrempunkte gilt:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y^2)}$$

$$d = \sqrt{(-2a-1-(-2a+1))^2 + (-a-1-(-a+1))^2}$$

$$d = \sqrt{(-2a-1+2a-1)^2 + (-a-1+a-1)^2}$$

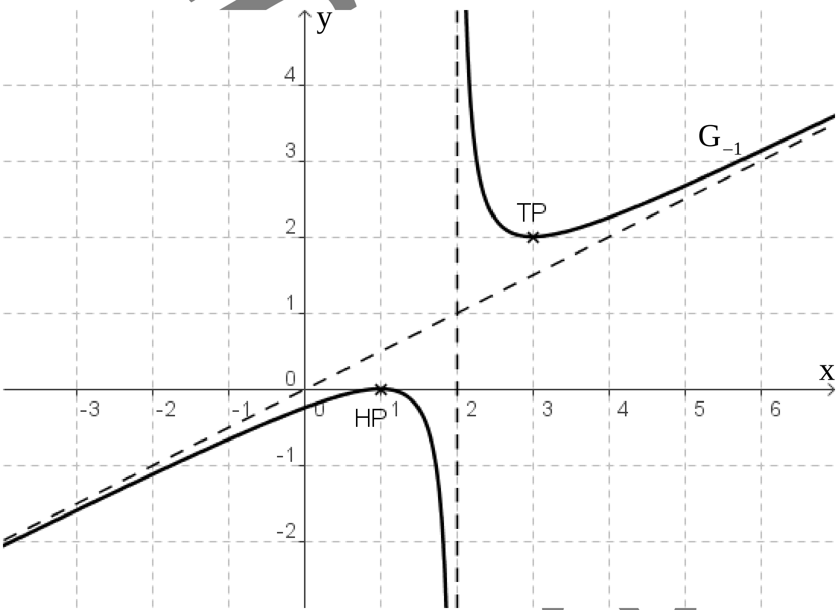
$$d = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$$

$$d = \sqrt{4+4}$$

$d = \sqrt{8}$ unabhängig von $a \in \mathbb{R}$

Somit ist der Abstand der beiden Extrempunkte für alle $a \in \mathbb{R}$ gleich.

5 1.6 Setzen Sie $a = -1$ und zeichnen Sie den Graphen G_{-1} mit seinen Asymptoten für $-3 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: $1\text{LE} = 1\text{cm}$.

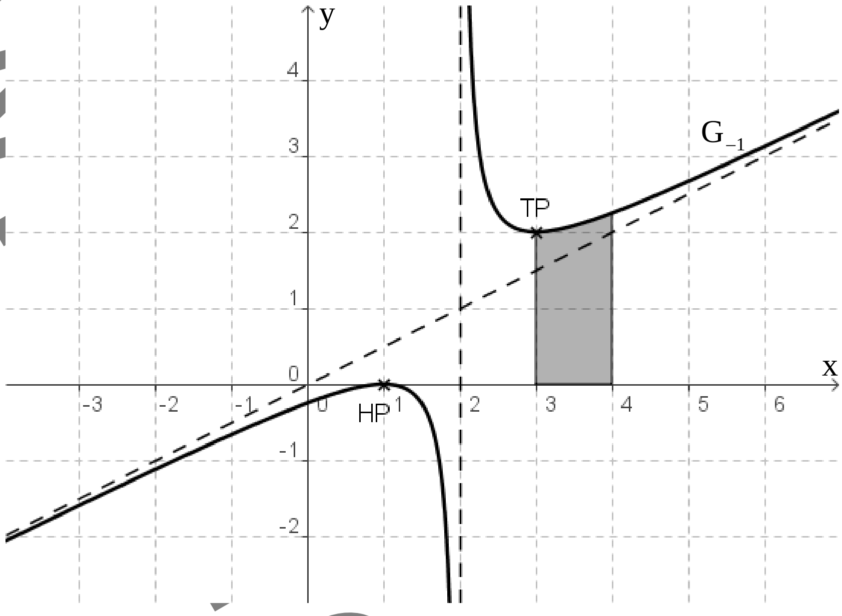


1.7.0 Für $a = -1$ erhält man nach entsprechender Umformung die Funktion $f_{-1} : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-4}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_{-1}$.

Der Graph G_{-1} begrenzt mit den drei Geraden mit den Gleichungen $y = 0$, $x = k$ und $x = k+1$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $k > 2$ ein Flächenstück A_k.

9 | 1.7.1 Kennzeichnen Sie für $k=3$ das Flächenstück A_3 im Schaubild der Aufgabe 1.6 und zeigen Sie, dass für die von k abhängige Flächenmaßzahl F des Flächenstücks A_k gilt:

$$F(k)=\tfrac{1}{2}\cdot\left(k+\tfrac{1}{2}+\ln\frac{k-1}{k-2}\right)$$



Um die gesuchte Fläche zu berechnen benötigt man den Funktionsterm $f(x)$. Verwendet man allerdings den in 1.0 gegebenen Term, so wird man nur schwer eine Stammfunktion finden. Besser ist es, man verwendet den Term, den man nach der Polynomdivision erhalten hat. Also: $f_{-1}(x)=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2x-4}$

Somit folgt nun für die gesuchte Fläche:

$$F(k)=\int_k^{k+1}\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2x-4}\right)dx=\left[\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{2}\ln|2x-4|\right]_k^{k+1}$$

Da $k>2$ ist (vgl. 1.7.0) kann man den Betrag beim ln auch weglassen!

$$F(k)=\left[\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{2}\ln(2x-4)\right]_k^{k+1}$$

$$F(k)=\tfrac{1}{4}(k+1)^2+\tfrac{1}{2}\ln\left(2(k+1)-4\right)-\left(\tfrac{1}{4}k^2+\tfrac{1}{2}\ln(2k-4)\right)$$

$$F(k)=\tfrac{1}{4}k^2+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\ln(2k-2)-\tfrac{1}{4}k^2-\tfrac{1}{2}\ln(2k-4)$$

$$F(k)=\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\left[\ln(2k-2)-\ln(2k-4)\right]$$

$$F(k)=\tfrac{1}{2}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{2}\ln\frac{2k-2}{2k-4}$$

$$F(k)=\tfrac{1}{2}\left[k+\tfrac{1}{2}+\ln\frac{2(k-1)}{2(k-2)}\right]$$

$$F(k)=\tfrac{1}{2}\left[k+\tfrac{1}{2}+\ln\frac{k-1}{k-2}\right]$$

9 | 1.7.2 Bestimmen Sie den Parameterwert k so, dass die Flächenmaßzahl F ihren absolut kleinsten Wert annimmt.

$$F(k)=\tfrac{1}{2}\left[k+\tfrac{1}{2}+\ln\frac{k-1}{k-2}\right]$$

$$F'(k)=\frac{dF(k)}{dk}=\tfrac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\frac{k-1}{k-2}}\cdot\frac{(k-2)\cdot 1-(k-1)\cdot 1}{(k-2)^2}\right]$$

$$F'(k)=\tfrac{1}{2}\left[1+\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{k-2-k+1}{(k-2)^2}\right]$$

$$F'(k)=\tfrac{1}{2}\left[1+\frac{-1}{(k-1)\cdot(k-2)}\right]$$

$$F'(k)=\tfrac{1}{2}\left[1-\frac{1}{k^2-3k+2}\right]=0$$

$$1-\frac{1}{k^2-3k+2}=0$$

$$1=\frac{1}{k^2-3k+2}$$

$$k^2-3k+2=1$$

$$k^2-3k+1=0$$

$$k_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$k_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\approx 2{,}618 \quad \text{ist Lösung!}$$

$$k_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}382 \quad \text{keine Lösung, da } k>2 \text{ sein muss!}$$

Nun noch die zweite Ableitung von $F(k)$

$$F''(k)=\tfrac{1}{2}\left[-\frac{0-(2k-3)}{\left(k^2-3k+2\right)^2}\right]$$

$$F''(k)=\frac{2k-3}{2\left(k^2-3k+2\right)^2}$$

$$F''\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\sqrt{5}>0 \quad \text{Linkskrümmung}$$

Somit hat F für $k_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ein relatives Minimum.

$$\lim_{k\to\infty}F(k)=\lim_{k\to\infty}\tfrac{1}{2}\left[k+\tfrac{1}{2}+\ln\frac{k-1}{k-2}\right]=\underbrace{\lim_{k\to\infty}\tfrac{1}{2}\cdot\left(k+\tfrac{1}{2}\right)}_{\to\infty}+\tfrac{1}{2}\cdot\underbrace{\lim_{k\to\infty}\ln\underbrace{\tfrac{k-1}{k-2}}_{\to 1}}_{\to 0}\to\infty$$

$$\lim_{k \overset{>}{\to} 2} F(k) = \lim_{k \overset{>}{\to} 2} \tfrac{1}{2}\left[k + \tfrac{1}{2} + \ln\frac{k-1}{k-2}\right] = \underbrace{\lim_{k \overset{>}{\to} 2} \tfrac{1}{2}\cdot\left(k+\tfrac{1}{2}\right)}_{=\frac{5}{4}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot\lim_{k \overset{>}{\to} 2} \ln \frac{\overbrace{k-1}^{\to 1}}{\underbrace{k-2}_{\to 0^+}}}_{\to\infty} \to \infty$$

Somit hat F für $k_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ sogar ein absolutes Minimum.

2.0 Nach einem Modell des britischen Ökonomen Thomas Malthus kann die Zahl B der Weltbevölkerung in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden. (Einheiten werden nicht mitgeführt.)
$B(t) = B_0 \cdot e^{r\cdot t}$, wobei gilt $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ sowie $r \in \mathbb{R}$ und $r > 0$.
Dabei gibt B_0 die Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt $t = 0$ am 1.1.1800 an und r ist ein Maß für die Wachstumsrate der Bevölkerung.
Am 1.1.1950 betrug die Weltbevölkerung etwa 3,7 Milliarden Menschen, und am 1.1.2050 werden etwa 9,5 Milliarden Menschen weltweit erwartet.

5 2.1 Zeigen Sie, dass für die Werte von B_0 und r gilt: $B_0 \approx 0{,}90\cdot 10^9$ und $r \approx 9{,}43\cdot 10^{-3}$.

$B(150) = B_0 \cdot e^{150r} = 3{,}7\cdot 10^9$

$B(250) = B_0 \cdot e^{250r} = 9{,}5\cdot 10^9$

Nun löst man die erste Gleichung nach B_0 und setzt dies in die zweite Gleichung ein:

$$B_0 = \frac{3{,}7\cdot 10^9}{e^{150r}}$$

$$\frac{3{,}7\cdot 10^9}{e^{150r}}\cdot e^{250r} = 9{,}5\cdot 10^9$$

$$\frac{e^{250r}}{e^{250r}} = \frac{9{,}5\cdot 10^9}{3{,}7\cdot 10^9}$$

$$e^{100r} = \tfrac{95}{37} \qquad |\cdot\ln(...)$$

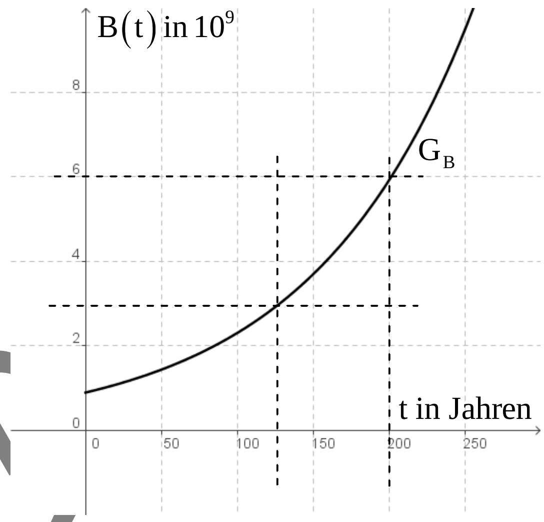
$$100r = \ln\tfrac{95}{37}$$

$$r = \frac{\ln\frac{95}{37}}{100} \approx 9{,}43\cdot 10^{-3}$$

$$B_0 = \frac{3{,}7\cdot 10^9}{e^{150\cdot 9{,}43\cdot 10^{-3}}} \approx 0{,}90\cdot 10^9$$

Somit folgt: $B(t) = 0{,}90\cdot 10^9 \cdot e^{9{,}43\cdot 10^{-3}\cdot t}$

3 | 2.2 Stellen Sie die Entwicklung der Weltbevölkerung zwischen 1.1.1800 und 1.1.2050 mit einem geeigneten Maßstab graphisch dar.



5 | 2.3 Entnehmen Sie einer entsprechenden Markierung im Diagramm der Aufgabe 2.2 zu einem beliebigem Zeitpunkt t das Intervall Δt, für das folgende Bedingung gilt:
$B(t+\Delta t) = 2 \cdot B(t)$
Zeigen Sie durch Rechnung, dass das Zeitintervall Δt unabhängig vom Zeitpunkt t ist, und berechnen Sie Δt auf eine Nachkommastelle gerundet.

Es soll gelten: $B(t+\Delta t) = 2 \cdot B(t)$

Mit Hilfe des Diagramms folgt: $B(200) = 2 \cdot B(125)$

also: $B(125+75) = 2 \cdot B(125)$

Somit folgt für $\Delta t \approx 75$ (ist abhängig von der Zeichen- und Ablesegenauigkeit)
Nun noch durch Rechnung:

$$\begin{aligned}
B(t+\Delta t) &= 2 \cdot B(t) \\
B_0 \cdot e^{r\cdot(t+\Delta t)} &= 2B_0 \cdot e^{r\cdot t} \\
e^{r\cdot t + r\cdot \Delta t} &= 2 \cdot e^{r\cdot t} \\
e^{r\cdot t} \cdot e^{r\cdot \Delta t} &= 2 \cdot e^{r\cdot t} \\
e^{r\cdot \Delta t} &= 2 \qquad \left| \cdot \ln(\ldots) \right. \\
r \cdot \Delta t &= \ln 2 \\
\Delta t &= \frac{\ln 2}{r} = \frac{\ln 2}{9{,}43 \cdot 10^{-3}} \approx 73{,}5
\end{aligned}$$

7 | 2.4 Die natürliche Tragfähigkeitsgrenze der Erde ist der Zeitpunkt t_{TG}, an dem die Maßzahl der zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel

$N(t) = 2{,}5 \cdot 10^7 \cdot t + 2{,}0 \cdot 10^9$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ (t in Jahren)

nicht mehr größer ist als die Zahl der Weltbevölkerung $B(t)$.

(Eine Nahrungsmitteleinheit entspricht zur Vereinfachung dabei einer Bevölkerungseinheit.)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens den Zeitpunkt t_{TG}. Benutzen Sie als Startwert $t_0 = 210$, führen Sie nur einen Näherungsschritt durch, runden Sie das Ergebnis auf ganze Jahre und geben Sie auch das entsprechende Jahr unserer Zeitrechnung an.

$$B(t) = N(t)$$

$$0{,}90 \cdot 10^9 \cdot e^{9{,}43 \cdot 10^{-3} \cdot t} = 2{,}5 \cdot 10^7 \cdot t + 2{,}0 \cdot 10^9$$

$$0{,}90 \cdot 10^9 \cdot e^{9{,}43 \cdot 10^{-3} \cdot t} - 2{,}5 \cdot 10^7 \cdot t - 2{,}0 \cdot 10^9 = 0 \quad \big| \cdot 10^{-7}$$

$$90 \cdot e^{9{,}43 \cdot 10^{-3} \cdot t} - 2{,}5 \cdot t - 200 = 0$$

Nun definiert man sich: $D(t) = 90 \cdot e^{9{,}43 \cdot 10^{-3} \cdot t} - 2{,}5 \cdot t - 200$

$\dot{D}(t) = 0{,}8487 \cdot e^{9{,}43 \cdot 10^{-3} \cdot t} - 2{,}5$

Mit dem Newtonverfahren (Startwert $t_0 = 210$) folgt somit:

$$t_1 = t_0 - \frac{D(t_0)}{\dot{D}(t_0)} = 210 - \frac{D(210)}{\dot{D}(210)} = 210 - \frac{90 \cdot e^{9{,}43 \cdot 10^{-3} \cdot 210} - 2{,}5 \cdot 210 - 200}{0{,}8487 \cdot e^{9{,}43 \cdot 10^{-3} \cdot 210} - 2{,}5} \approx 230$$

Die Tragfähigkeitsgrenze wäre damit am 01.01.2030 erreicht.

70