2011 A I Angabe

BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a: x \mapsto \frac{x^2+2ax+1}{2x+4a}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_a$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_a bezeichnet.
4	1.1	Geben Sie $\mathbb{D}_a$ an und bestimmen Sie die Art der Definitionslücke.
6	1.2	Ermitteln Sie, für welche Parameterwerte a die Funktion f_a zwei verschiedene Nullstellen, genau eine Nullstelle bzw. keine Nullstelle hat, und geben Sie die entsprechenden Nullstellen an.
6	1.3	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $\lvert x \rvert \to \infty$ und bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_a.
8	1.4	Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f_a und ermitteln Sie damit Art und Lage der Extrempunkte des Graphen G_a. $\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: f_a'(x) = \frac{(x+2a)^2-1}{2(x+2a)^2}\right]$
3	1.5	Zeigen Sie, dass unabhängig von a der Tiefpunkt $T_a(-2a+1; -a+1)$ und der Hochpunkt $H(-2a-1; -a-1)$ des Graphen G_a immer denselben Abstand voneinander haben.
5	1.6	Setzen Sie $a=-1$ und zeichnen Sie den Graphen G_{-1} mit seinen Asymptoten für $-3 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: $1\text{LE} = 1\text{cm}$.
	1.7.0	Für $a=-1$ erhält man nach entsprechender Umformung die Funktion $f_{-1}: x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-4}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_{-1}$. Der Graph G_{-1} begrenzt mit den drei Geraden mit den Gleichungen $y=0$, $x=k$ und $x=k+1$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $k>2$ ein Flächenstück A_k.
9	1.7.1	Kennzeichnen Sie für $k=3$ das Flächenstück A_3 im Schaubild der Aufgabe 1.6 und zeigen Sie, dass für die von k abhängige Flächenmaßzahl F des Flächenstücks A_k gilt: $F(k) = \frac{1}{2} \cdot \left(k + \frac{1}{2} + \ln\frac{k-1}{k-2}\right)$
9	1.7.2	Bestimmen Sie den Parameterwert k so, dass die Flächenmaßzahl F ihren absolut kleinsten Wert annimmt.

2.0 Nach einem Modell des britischen Ökonomen Thomas Malthus kann die Zahl B der Weltbevölkerung in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden. (Einheiten werden nicht mitgeführt.)

$B(t) = B_0 \cdot e^{r \cdot t}$, wobei gilt $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ sowie $r \in \mathbb{R}$ und $r > 0$.

Dabei gibt B_0 die Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt $t = 0$ am 1.1.1800 an und r ist ein Maß für die Wachstumsrate der Bevölkerung.
Am 1.1.1950 betrug die Weltbevölkerung etwa 3,7 Milliarden Menschen, und am 1.1.2050 werden etwa 9,5 Milliarden Menschen weltweit erwartet.

5 2.1 Zeigen Sie, dass für die Werte von B_0 und r gilt: $B_0 \approx 0,90 \cdot 10^9$ und $r \approx 9,43 \cdot 10^{-3}$.

3 2.2 Stellen Sie die Entwicklung der Weltbevölkerung zwischen 1.1.1800 und 1.1.2050 mit einem geeigneten Maßstab graphisch dar.

5 2.3 Entnehmen Sie einer entsprechenden Markierung im Diagramm der Aufgabe 2.2 zu einem beliebigem Zeitpunkt t das Intervall Δt, für das folgende Bedingung gilt:

$B(t + \Delta t) = 2 \cdot B(t)$

Zeigen Sie durch Rechnung, dass das Zeitintervall Δt unabhängig vom Zeitpunkt t ist, und berechnen Sie Δt auf eine Nachkommastelle gerundet.

7 2.4 Die natürliche Tragfähigkeitsgrenze der Erde ist der Zeitpunkt t_{TG}, an dem die Maßzahl der zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel

$N(t) = 2,5 \cdot 10^7 \cdot t + 2,0 \cdot 10^9$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ (t in Jahren)

nicht mehr größer ist als die Zahl der Weltbevölkerung $B(t)$.

(Eine Nahrungsmitteleinheit entspricht zur Vereinfachung dabei einer Bevölkerungseinheit.)
Bestimmen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens den Zeitpunkt t_{TG}. Benutzen Sie als Startwert $t_0 = 210$, führen Sie nur einen Näherungsschritt durch, runden Sia das Ergebnis auf ganze Jahre und geben Sie auch das entsprechende Jahr unserer Zeitrechnung an.

70