

2010 B II Angabe

BE 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 mit dem Ursprung O sind die Punkte $A(1; 0; -2)$, $B(-1; 2; 2)$ und $C_k(k; -k; -2-k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

3 1.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die drei Vektoren \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} und $\overrightarrow{OC_k}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

Sie bilden genau dann eine Basis des \mathbb{R}^3 , wenn gilt: $\text{Det}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC_k}) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & 2 & -k \\ -2 & 2 & -2-k \end{vmatrix} = 2(-2-k) - 2k + 4k + 2k = -4 + 2k = 0 \Rightarrow k = 2$$

Die drei Vektoren \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} und $\overrightarrow{OC_k}$ bilden somit für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 .

4 1.2 Die Punkte O, A, B und C_k bilden jeweils ein Tetraeder. Berechnen Sie alle Werte von k, für die das Volumen des zugehörigen Tetraeders 1 VE beträgt.

Für das Volumen eines Tetraeders (dreiseitige Pyramide) welches von den Vektoren \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} und $\overrightarrow{OC_k}$ aufgespannt wird gilt: $V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6} \cdot |\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC_k})|$

Mit 1.1 erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \cdot |2k - 4| &= 1 \\ |2k - 4| &= 6 \\ 2k - 4 &= -6 \quad 2k - 4 = 6 \\ k_1 &= -1 \quad k_2 = 5 \end{aligned}$$

4 1.3 Bestimmen Sie k so, dass der zugehörige Punkt C_k von den Punkten A und B gleich weit entfernt ist.

Es muss gelten:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC_k}| &= |\overrightarrow{BC_k}| \\ \begin{pmatrix} k-1 \\ -k \\ -k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k+1 \\ -k-2 \\ -k-4 \end{pmatrix} \\ \sqrt{(k-1)^2 + (-k)^2 + (-k)^2} &= \sqrt{(k+1)^2 + (-k-2)^2 + (-k-4)^2} \quad |(\dots)^2 \\ k^2 - 2k + 1 + k^2 + k^2 &= k^2 + 2k + 1 + k^2 + 4k + 4 + k^2 + 8k + 16 \\ 3k^2 - 2k + 1 &= 3k^2 + 14k + 21 \\ -16k &= 20 \\ k &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

- 1.4.0 Die Punkte A und B legen die Gerade g fest, die Punkte C_k liegen auf der Geraden h.
 5 1.4.1 Geben Sie für die beiden Geraden g und h jeweils eine Gleichung an und untersuchen Sie die gegenseitig Lage dieser beiden Geraden.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -2-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Betrachtet man die beiden Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = -2 \\ r = -2 \\ r = -4 \end{matrix} \Rightarrow \text{Richtungsvektoren sind linear unabhängig}$$

Somit sind die beiden Geraden nicht parallel zueinander.

Nun setzt man beiden Geraden gleich.

$$g = h \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 - 2\lambda \\ k = -2\lambda \end{cases}$$

Da man hier zwei verschiedenen Lösungen für k erhält haben die beiden Geraden keinen Schnittpunkt und sind daher zueinander windschief.

- 8 1.4.2 Stellen Sie eine Gleichung der Geraden i auf, die die beiden Geraden g und h jeweils senkrecht schneidet.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Den Richtungsvektor der Gerade i erhält man aus dem Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren der Geraden g und h.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 4-2 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor steht schon mal senkrecht auf den beiden Geraden.

Nun bildet man eine Hilfsebene F welche durch die Gerade g und dem Vektor \vec{u}_i gebildet wird.

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt dieser Ebene F mit der Geraden h liefert einen Punkt, welcher dann als Aufpunkt (Stützvektor) der Geraden i verwendet werden kann.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_F = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow F: \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Nun die Gerade h einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$-(k-1) - k + k = 0$$

$$k = 1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Somit folgt für die Gerade i:

$$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.0 Die Punkte A, B und C_k aus 1.0 legen für jeden Wert von k genau eine Ebene E_k fest.

2.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_k in Normalenform.

$$[\text{Mögliches Ergebnis: } E_k: kx_1 + (k-2)x_2 + x_3 - k + 2 = 0]$$

$A(1; 0; -2)$, $B(-1; 2; 2)$ und $C_k(k; -k; -2-k)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC_k} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k-1 \\ -k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k+4k \\ 4(k-1)-2k \\ 2k-2(k-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ 2k-4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} k \\ k-2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{E_k} = \begin{pmatrix} k \\ k-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_k: \begin{pmatrix} k \\ k-2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

2.2 Gegeben ist außerdem die Ebene $H: x_1 - x_2 - 2x_3 + 19 = 0$

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes S, der sowohl auf der Ebene H als auch auf jeder Ebene E_k liegt.

Da der Punkt S in jeder Ebene E_k liegen soll, muss er auf der Geraden g liegen (denn diese Gerade enthält alle Punkte, die für jedes k auch in der Ebene E_k liegen).

Somit benötigt man lediglich den Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene H.

Dazu setzt man g in H ein:

$$1 - 2\lambda - 2\lambda - 2(-2 + 4\lambda) + 19 = 0$$

$$1 - 2\lambda - 2\lambda + 4 - 8\lambda + 19 = 0$$

$$-12\lambda = -24$$

$$\lambda = 2$$

Und nun $\lambda = 2$ in g eingesetzt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-3|4|6)$$