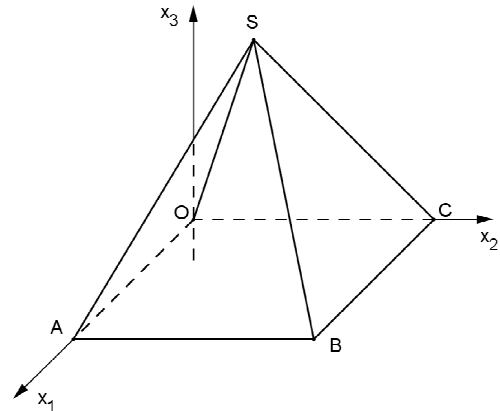


## 2010 B I Angabe

Vor dem Louvre, dem berühmten Pariser Kunstmuseum, wurde im Jahr 1989 eine Glaspypamide erbaut, welche den unterirdisch liegenden Haupteingang beherbergt. Diese Pyramide wurde der Cheops-Pyramide nachempfunden. Die Seitenlänge der quadratischen, nach unten offenen Grundfläche beträgt 35 m und die Spitze S liegt lotrecht über deren Mittelpunkt in einer Höhe von 22 m. In einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem (1LE = 1m) sind der



Ursprung O und der Punkt B(35; 35; 0) zwei Eckpunkte der in der  $x_1, x_2$  – Ebene liegenden horizontalen Grundfläche. Die Skizze zeigt die prinzipielle Lage der Pyramide.

2 1 Geben Sie die Koordinaten der beiden Eckpunkte A und C sowie der Spitze S an.

Der Punkt A liegt auf der  $x_1$  – Achse und hat vom Koordinatenursprung eine Entfernung von 35LE: A(35|0|0)

Der Punkt C liegt auf der  $x_2$  – Achse und hat vom Koordinatenursprung eine Entfernung von 35LE: C(0|35|0)

Der Punkt S liegt senkrecht über der Mitte des Quadrats ABCO, somit folgt für die Koordinaten von S: S(17,5|17,5|22)

4 2 Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Normalengleichung der Ebene E, in der die Punkte A, B und S liegen.

[Mögliches Teilergebnis: E:  $22x_1 + 17,5x_3 - 770 = 0$ ]

$$E: \vec{x} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{AB} + \mu \cdot \overline{AS}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 35-35 \\ 35-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 17,5-35 \\ 17,5-0 \\ 22-0 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -17,5 \\ -17,5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -17,5 \\ -17,5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \cdot 22 - 0 \\ 0 \\ 0 - 35 \cdot (-17,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \cdot 22 \\ 0 \\ 35 \cdot 17,5 \end{pmatrix} = 35 \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix}$$

Für die Normalengleichung E:  $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$  folgt dann:

$$E: \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix} \circ \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Die Koordinatengleichung würde man so erhalten:

$A(35|0|0)$  in  $22x_1 + 17,5x_3 + c = 0$  einsetzen:

$$22 \cdot 35 + 17,5 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -770$$

Somit folgt:  $E: 22x_1 + 17,5x_3 - 770 = 0$

- 4 3 Berechnen Sie den Neigungswinkel einer Seitenfläche gegenüber der Grundfläche.

Der Neigungswinkel  $\alpha$  zwischen der Ebene E und der Grundfläche ist identisch mit dem Schnittwinkel der beiden Normalenvektoren dieser beiden Ebenen.

Der Normalenvektor der Ebene E (Ebene durch A, B und S) ist:  $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix}$

Der Normalenvektor der Grundfläche ( $x_1 - x_2$  - Ebene) ist:  $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{17,5}{\sqrt{790,25} \cdot 1} \Rightarrow \alpha = 51,50^\circ$$

- 3 4 Berechnen Sie den Flächeninhalt einer der vier gläsernen Seitenflächen.

Für den Flächeninhalt des von den Vektoren  $\vec{AB}$  und  $\vec{AS}$  aufgespannten Dreiecks ABS gilt:

$$F_{\triangle ABS} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AS}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -17,5 \\ -17,5 \\ 22 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 770 \\ 0 \\ 612,5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{770^2 + 612,5^2} = 491,95$$

- 5.0 An einem Punkt S befestigten Seil wurde eine nach allen Seiten gleichmäßig Licht abstrahlende Lampe so aufgehängt, dass die Lichtstrahlen im Schwerpunkt jeder Seitenfläche senkrecht auftreffen.

- 7 5.1 Zeigen Sie, dass der Punkt  $M\left(\frac{175}{6}; \frac{35}{2}; \frac{22}{3}\right)$  der Schwerpunkt des Dreiecks ABS ist, und zeigen Sie, dass der Aufhängepunkt P der als punktförmig angenommenen Lampe unterhalb der offenen Grundfläche OABC liegt.

Für den Ortsvektor des Schwerpunkts M des Dreiecks ABS gilt:  $\vec{m} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{s})$

$$\vec{m} = \frac{1}{3} \left( \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 87,5 \\ 52,5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{175}{6} \\ \frac{35}{2} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow M \left( \frac{175}{6}; \frac{35}{2}; \frac{22}{3} \right)$$

Das Seil an welchem die Lampe hängt wird beschrieben durch die Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Licht soll senkrecht auf den Schwerpunkt M der Seitenfläche treffen; dieser Lichtstrahl wird beschrieben durch die Geradengleichung:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{175}{6} \\ \frac{35}{2} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden liefert die Position P der Lampe. Also:

$$g = h$$

$$\begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{175}{6} \\ \frac{35}{2} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix}$$

Man erhält nun folgendes Gleichungssystem (das recht einfach zu lösen ist):

$$17,5 = \frac{175}{6} + 22\mu \Rightarrow \mu = -\frac{35}{66}$$

$$17,5 = 17,5 \quad (w)$$

$$22 + \lambda = \frac{22}{3} - \frac{35}{66} \cdot \frac{22}{3} \Rightarrow \lambda = -\frac{167}{9}$$

Da das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist gibt es auch einen Schnittpunkt. Diesen erhält man, indem man  $\lambda = -23\frac{125}{132}$  in die Geradengleichung g einsetzt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} - 23\frac{125}{132} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ -\frac{257}{132} \end{pmatrix} \Rightarrow P(17,5|17,5|-\frac{257}{132})$$

Da die  $x_3$ -Koordinate des Punktes P negativ ist ( $x_3 = -\frac{257}{132} < 0$ ), liegt der Punkt P unterhalb der Grundfläche.

- 5 5.2 Die Position der Lampe kann für spezielle Lichteffekte durch Veränderung der Seillänge verändert werden. Berechnen sie den Abstand der Lampe von der Seitenkante OS, wenn die Lampe auf Höhe der  $x_1, x_2$ -Ebene angebracht wird.

Für die Position der Lampe gilt:  $L(17,5|17,5|0)$

Nun bildet man eine Hilfsebene F senkrecht zu  $\overline{OS}$  durch den Punkt L:

$$F: \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} \right) = 0$$

und setzt den allgemeinen Geradenpunkt der Geraden durch O und S:  $l: \vec{x} = \kappa \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix}$

in die Ebene F ein:

$$\begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} \circ \left( \kappa \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$17,5 \cdot (17,5\kappa - 17,5) + 17,5 \cdot (17,5\kappa - 17,5) + 22 \cdot 22\kappa = 0$$

$$1096,5\kappa - 612,5 = 0$$

$$\kappa = \frac{1225}{2193}$$

Setzt man dieses nun in die Geradengleichung von  $\ell$  ein, so erhält man den Schnittpunkt R.

$$\vec{x} = \frac{1225}{2193} \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{42875}{4386} \\ \frac{42875}{4386} \\ \frac{26950}{2193} \end{pmatrix} \Rightarrow R \left( \frac{42875}{4386} \mid \frac{42875}{4386} \mid \frac{26950}{2193} \right)$$

Für den Abstand d gilt dann:

$$d = |\vec{LR}| = \left| \begin{pmatrix} \frac{42875}{4386} \\ \frac{42875}{4386} \\ \frac{26950}{2193} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{-33880}{4386} \\ \frac{-33880}{4386} \\ \frac{26950}{2193} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{-33880}{4386}\right)^2 + \left(\frac{-33880}{4386}\right)^2 + \left(\frac{26950}{2193}\right)^2} \approx 16,44$$

*Bemerkung: Es wäre auch in Ordnung anstatt mit den Brüchen mit gerundeten Dezimalbrüchen zu rechnen!*

5 6

Vor der Pyramide steht ein senkrechter Fahnenmast, dessen Spitze F die Koordinaten

$F(40; 30; 8)$  besitzt. Paralleles Sonnenlicht mit dem Richtungsvektor  $\vec{l} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$  erzeugt

auf der Seitenfläche ABS der Pyramide den Schattenpunkt  $F_s$  der Spitze F.

Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes  $F_s$ .

Für den Sonnenstrahl gilt:  $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Nun bildet man  $s \cap E$  (man setzt also s in E ein):

$$\begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix} \circ \left( \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17,5 \end{pmatrix} \circ \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$22 \cdot (5 - 2,5\tau) + 17,5 \cdot (8 - 2\tau) = 0$$

$$-90\tau + 250 = 0$$

$$\tau = \frac{25}{9}$$

eingesetzt in s:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{25}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{595}{18} \\ \frac{65}{3} \\ \frac{22}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow F_s(33\frac{1}{18} | 21\frac{2}{3} | 2\frac{4}{9})$

30

www.extremstark.de