2010 A II Angabe

BE 1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$ in der vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ unabhängigen Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

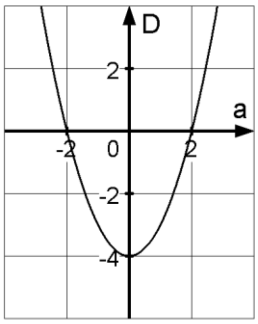
4 1.1 Ermitteln Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - ax + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

Die Anzahl der Nullstellen hängt von der Diskriminante $D = a^2 - 4$ ab

$a^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1/2} = \pm 2$



Somit folgt für die Anzahl und Lage der Nullstellen:
Keine Nullstellen für $a \in]-2; 2[$
Eine Nullstelle für $a_1 = -2$ mit der Nullstelle $x_1 = -1$
und für $a_2 = 2$ mit der Nullstelle $x_1 = 1$
Zwei Nullstellen für $a \in \mathbb{R} \setminus [-2; 2]$ mit den Nullstellen

$$x_{1/2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

6 1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ in der Nähe der Definitionslücke sowie für $|x| \to \infty$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f_a(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x^2 - ax + 1}{x^2} = \lim_{h \to 0} \frac{(0-h)^2 - a(0-h) + 1}{(0-h)^2} = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{h^2 + ah + 1}^{\to 1}}{\underbrace{h^2}_{\to 0^0}} \to \infty$$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f_a(x) \to \infty$ da Polstelle 2. Ordnung (Pol ohne Vorzeichenwechsel!)

Somit hat man eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0$.

$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{x^2 - ax + 1}^{\to \infty}}{\underbrace{x^2}_{\to \infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\overset{\to \infty}{2x - a}}{\underset{\to \infty}{2x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{x^2 - ax + 1}^{\to \infty}}{\underbrace{x^2}_{\to \infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\overset{\to \infty}{2x - a}}{\underset{\to \infty}{2x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{2} = 1$$

Somit hat man eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 1$

14 | 1.3 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die jeweils maximalen Monotonieintervalle der Funktion f_a, geben Sie diejenigen Werte von a an, für die der jeweilige Graph von f_a einen Extrempunkt hat, und ermitteln Sie dessen Art und Lage in Abhängigkeit von a.
Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $a=0$, $a>0$ und $a<0$.

$$\left[\text{mögliches Teilergebnis}: f_a'(x)=\frac{a}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right]$$

$$f_a(x)=\frac{x^2-ax+1}{x^2}$$

$$f_a'(x)=\frac{x^2\cdot(2x-a)-\left(x^2-ax+1\right)\cdot 2x}{x^4}$$

$$f_a'(x)=\frac{2x^3-ax^2-2x^3+2ax^2-2x}{x^4}$$

$$f_a'(x)=\frac{ax^2-2x}{x^4}$$

$$f_a'(x)=\frac{x(ax-2)}{x^4}$$

$$f_a'(x)=\frac{ax-2}{x^3}$$

1. Fall: $a=0$

Dann gilt: $f_0'(x)=\frac{-2}{x^3}>0$ für $x<0$ und $f_0'(x)=\frac{-2}{x^3}<0$ für $x>0$

G_{f_0} ist sms für $x\in\left]-\infty;0\right[$ und smf für $x\in\left]0;\infty\right[$

2. Fall: $a<0$

$$f_a'(x)=\frac{ax-2}{x^3}=0 \;\Rightarrow\; ax-2=0 \;\Rightarrow\; x_1=\tfrac{2}{a} \qquad \left(\text{Da } a<0 \text{ ist auch } x_1=\tfrac{2}{a}<0\right)$$

x		$\frac{2}{a}$		0	
$ax-2$	$+$		$-$		$-$
x^3	$-$		$-$		$+$
$f_a'(x)$	$-$		$+$		$-$
G_{f_a}	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		TP		n.d.	

G_{f_a} ist sms für $x\in\left[\tfrac{2}{a};0\right[$ und smf für $x\in\left]-\infty;\tfrac{2}{a}\right]$ und für $x\in\left]0;\infty\right[$

$$f_a\left(\tfrac{2}{a}\right)=\frac{\left(\frac{2}{a}\right)^2-a\cdot\frac{2}{a}+1}{\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\frac{\frac{4}{a^2}-2+1}{\frac{4}{a^2}}=\frac{\frac{4}{a^2}-1}{\frac{4}{a^2}}=\frac{\left(\frac{4}{a^2}-1\right)\cdot a^2}{\frac{4}{a^2}\cdot a^2}=\frac{4-a^2}{4}=1-\tfrac{1}{4}a^2 \;\Rightarrow\; TP\left(\tfrac{2}{a}\middle|1-\tfrac{1}{4}a^2\right)$$

3. Fall: $a > 0$

$f_a'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{a}$ $\quad \left(\text{Da } a > 0 \text{ ist auch } x_1 = \frac{2}{a} > 0\right)$

		0		$\frac{2}{a}$		x
$ax-2$	$-$		$-$		$+$	
x^3	$-$		$+$		$+$	
$f_a'(x)$	$+$		$-$		$+$	
G_{f_a}	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		n.d.		TP		

G_{f_a} ist sms für $x \in]-\infty; 0[$ und für $x \in [\frac{2}{a}; \infty[$ und smf für $x \in [0; \frac{2}{a}]$

$f_a\left(\frac{2}{a}\right) = 1 - \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow TP\left(\frac{2}{a} | 1 - \frac{1}{4}a^2\right)$

5 1.4 Untersuchen Sie, für welche Werte von a der Graph von f_a einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen die dessen Koordinaten in Abhängigkeit von a.

$$f_a''(x) = \frac{x^3 \cdot a - (ax-2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 \cdot (ax - 3 \cdot (ax-2))}{x^6} = \frac{ax - 3ax + 6}{x^4} = \frac{6-2ax}{x^4}$$

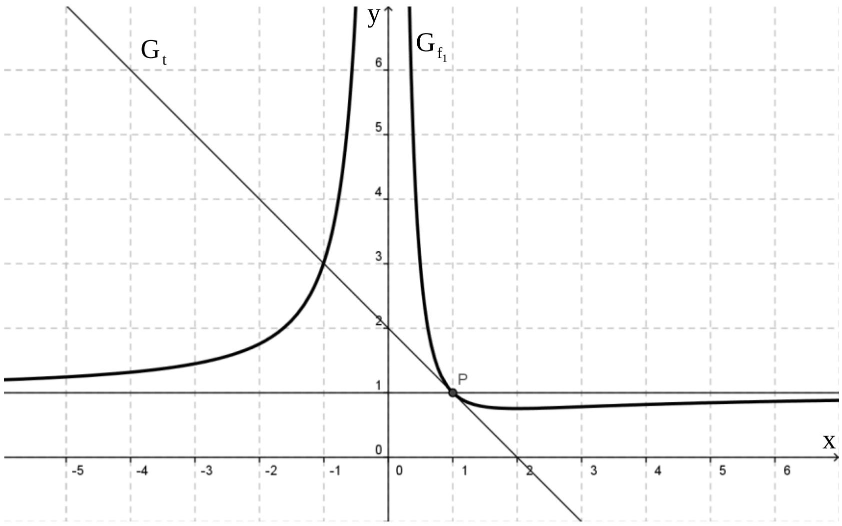
Keine Wendepunkte erhält man für $a = 0$, da gilt: $f_0''(x) = \frac{6}{x^4} \neq 0$

Für $a \neq 0$ folgt:

$f_a''(x) = \frac{6-2ax}{x^4} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{a}$ ist einfache Nullstelle des Zählers (und keine Nullstelle des Nenners), somit hat $f_a''(x)$ an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel und der Graph einen Wendepunkt.

$$f_a\left(\frac{3}{a}\right) = \frac{\left(\frac{3}{a}\right)^2 - a \cdot \left(\frac{3}{a}\right) + 1}{\left(\frac{3}{a}\right)^2} = \frac{\frac{9}{a^2} - 3 + 1}{\frac{9}{a^2}} = \frac{\left(\frac{9}{a^2} - 2\right) \cdot a^2}{\frac{9}{a^2} \cdot a^2} = 1 - \frac{2}{9}a^2 \Rightarrow WP\left(\frac{3}{a} | 1 - \frac{2}{9}a^2\right)$$

4 1.5 Setzen sie nun $a = 1$ und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weitere geeigneter Funktionswerte für $-5 \leq x \leq 5$ den Graphen von f_1 mit seinen Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab $1LE = 1cm$.



3 1.6 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t im Punkt $P(1; f_1(1))$ an den Graphen von f_1 und zeichnen Sie die Tangente t in das Diagramm der Aufgabe 1.5 ein.
$[\text{mögliches Teilergebnis}: t: y = -x + 2]$

$f_1(1) = \frac{1^2 - 1\cdot 1 + 1}{1^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad P(1|1)$

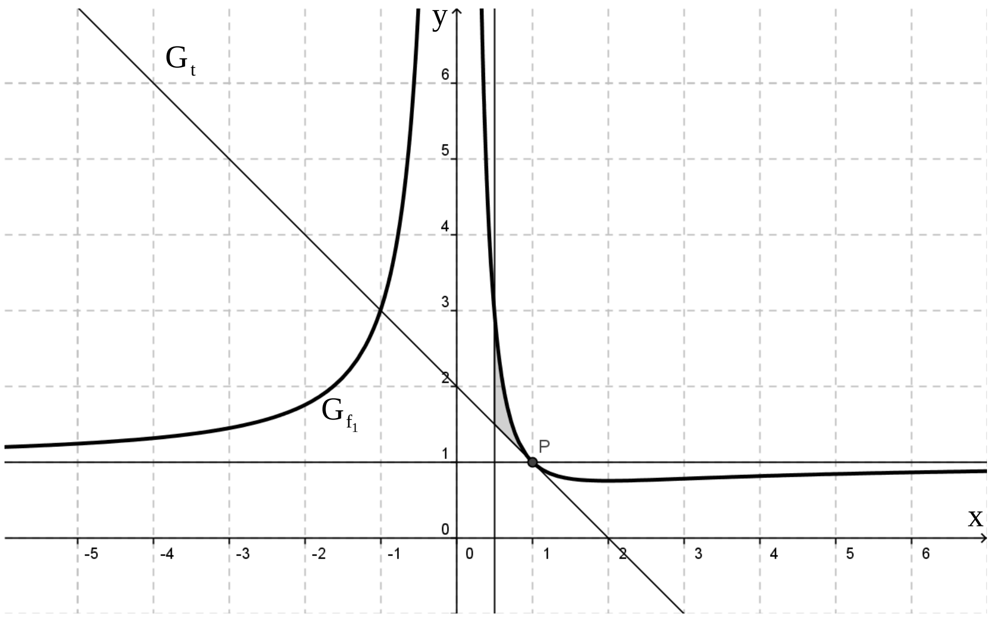
$f_1'(1) = \frac{1\cdot 1 - 2}{1^3} = -1 = m_t$

in $y = mx + t$ einsetzen: $1 = -1\cdot 1 + t \quad \Rightarrow \quad t = 2$

Tangentengleichung: $t: y = -x + 2$

5 1.7 Für $0 < k < 1$ schließen die Gerade mit der Gleichung $x = k$, der Graph von f_1 und die Tangente t ein endliches Flächenstück A_k ein.
Markieren Sie dieses Flächenstück für $k = 0{,}5$ im Diagramm der Aufgabe 1.5 und zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $A(k)$ der Fläche A_k in Abhängigkeit von k gilt:

$$A(k) = \frac{k^2 + k\cdot \ln(k) + 1}{k} - \frac{k^2 + 3}{2}$$



Es gilt: $f_1(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$$A(k)=\int_k^1 \left(f_1(x)-t(x)\right)dx$$

$$A(k)=\int_k^1 \left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+x-2\right)dx$$

$$A(k)=\int_k^1 \left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+x-1\right)dx$$

$$A(k)=\left[-\ln(x)-\frac{1}{x}+\tfrac{1}{2}x^2-x\right]_k^1$$

$$A(k)=\left(-\ln(1)-\frac{1}{1}+\tfrac{1}{2}\cdot 1^2-1\right)-\left(-\ln(k)-\frac{1}{k}+\tfrac{1}{2}k^2-k\right)$$

$$A(k)=-1+\tfrac{1}{2}-1+\ln(k)+\frac{1}{k}-\tfrac{1}{2}k^2+k$$

$$A(k)=-\tfrac{3}{2}+\ln(k)+\frac{1}{k}-\tfrac{1}{2}k^2+k$$

$$A(k)=k+\ln(k)+\frac{1}{k}-\tfrac{1}{2}k^2-\tfrac{3}{2}$$

$$A(k)=\frac{\left(k+\ln(k)+\frac{1}{k}\right)\cdot k}{k}-\tfrac{1}{2}\left(k^2+3\right)$$

$$A(k)=\frac{k^2+k\cdot\ln(k)+1}{k}-\frac{k^2+3}{2}$$

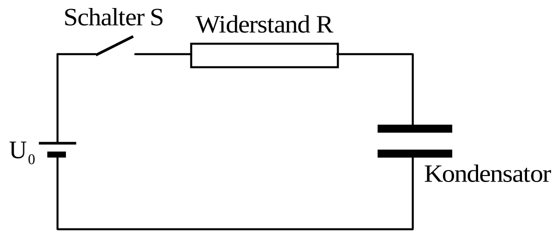
6 | 1.8 Beweisen Sie zunächst, das gilt: $\lim\limits_{\substack{k\to 0\\ k>0}}\left[k\cdot\ln(k)\right]=0$. Untersuchen Sie dann, ob der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{k\to 0\\ k>0}}A(k)$ existiert, und erklären Sie, was Ihr Ergebnis geometrisch bedeutet.

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}[\underbrace{k}_{\to 0}\cdot\underbrace{\ln(k)}_{\to -\infty}]=\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}\frac{\overbrace{\ln(k)}^{\to -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{k}}_{\to\infty}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}\frac{\frac{1}{k}}{-\frac{1}{k^2}}=\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}\left(-\frac{1}{k}\cdot\frac{k^2}{1}\right)=\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}(-k)=0$$

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}A(k)=\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}\left(\frac{k^2+k\cdot\ln(k)+1}{k}-\frac{k^2+3}{2}\right)=\underbrace{\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}\frac{\overbrace{\overbrace{k^2}^{\to 0}+\overbrace{k\cdot\ln(k)}^{\to 0}+1}^{\to 1}}{\underbrace{k}_{\to 0}}}_{\to\infty}-\underbrace{\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}\frac{k^2+3}{2}}_{\to\frac{3}{2}}\to\infty$$

Bedeutung: Die eingeschlossene Fläche wird unendlich groß!

2.0 Ein Doppelschicht-Kondensator ist entsprechend der gegebenen Schaltung mit einer Gleichspannungsquelle verbunden, die eine konstante Spannung $U_0 = 5{,}00\,V$ liefert. Der Widerstand R des Stromkreises beträgt $10\,\Omega$.



Wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Schalter S geschlossen, beginnt der Kondensator sich aufzuladen. Der zeitliche Verlauf der am Kondensator anliegenden Spannung in Volt (V) wird beschrieben durch die Gleichung:
$U_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\alpha \cdot t}\right)$, wobei $\alpha = 2{,}50 \cdot 10^{-2}\,s^{-1}$

3 2.1 Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} U_C(t)$ und erklären Sie die Bedeutung dieses Grenzwerts.

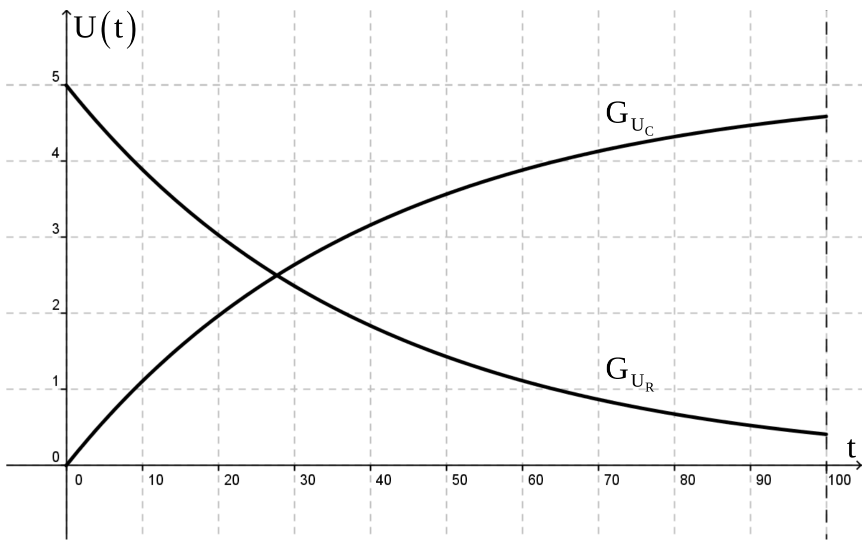
$$\lim_{t\to\infty} U_C(t) = \lim_{t\to\infty} U_0 \cdot (1 - \underbrace{e^{-\alpha \cdot t}}_{\to 0}) = U_0 = 5{,}00\,V$$

Bedeutung: Der Kondensator trägt nach sehr langer Zeit die Ladung $U_0 = 5{,}00\,V$.

5 2.2 Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Kondensatorspannung $U_C(t)$ sowie für die am Widerstand R anliegende Spannung $U_R(t)$ für $0 \le t \le 100\,s$ mit einer Schrittweite von $\Delta t = 20\,s$ und stellen Sie $U_C(t)$ und $U_R(t)$ in einem gemeinsamen Diagramm graphisch dar.
Hinweis: Offensichtlich gilt zu jedem Zeitpunkt $U_0 = U_C + U_R$.
Maßstab: $1\,cm$ entspricht $10\,s$ bzw. $1\,V$.

Es gilt:
$$U_0 = U_C + U_R \quad \Rightarrow \quad U_R = U_0 - U_C = U_0 - U_0 \cdot \left(1 - e^{-\alpha \cdot t}\right) = U_0 - U_0 + U_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t} = U_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$
$$U_C(t) = 5\,V \cdot \left(1 - e^{-0{,}025\frac{1}{s} \cdot t}\right) \qquad U_R(t) = 5\,V \cdot e^{-0{,}025\frac{1}{s} \cdot t}$$

t in s	0	20	40	60	80	100
$U_C(t)$ in V	0	1,96	3,16	3,88	4,32	4,59
$U_R(t)$ in V	5	3,03	1,84	1,12	0,68	0,41



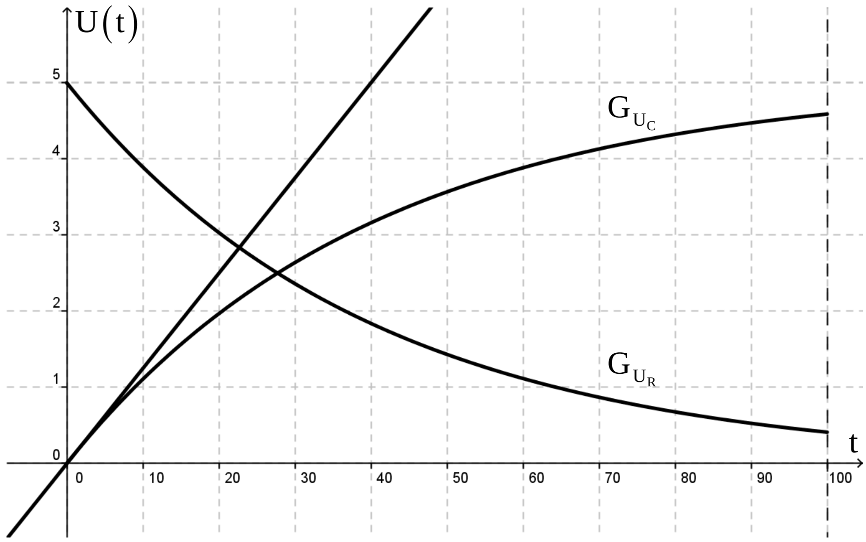
5 2.3 Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Spannung U_C zur Zeit $t_0 = 0$ sowie ihren Grenzwert für $t \to \infty$. Stellen Sie eine Gleichung der (einseitigen) Tangente an den Graphen von U_C im Ursprung auf und zeichnen sie diese Tangente in das Diagramm der Aufgabe 2.2 ein.

$$U_C(t) = 5\,V \cdot \left(1 - e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot t}\right)$$

$$\frac{U_C(t)}{dt} = 0{,}125\,\frac{V}{s} \cdot e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot t} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_C(0)}{dt} = 0{,}125\,\frac{V}{s} \cdot e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot 0} = 0{,}125\,\frac{V}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U_C(t)}{dt} = \lim_{t\to\infty} 0{,}125\,\frac{V}{s} \cdot e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot t} = 0\,\frac{V}{s}$$

Tangente: $y = 0{,}125\,\frac{V}{s} \cdot t$

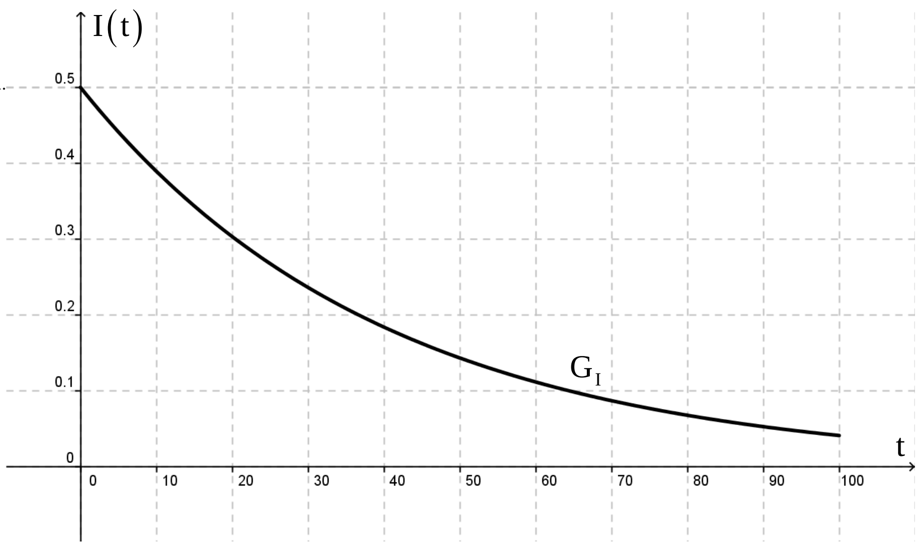


3 2.4 In dem gegebenen Stromkreis gilt für die Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t die Gleichung: $I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$

Stellen Sie in einem neuen Diagramm die Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t graphisch dar.

$$I(t) = \frac{5\,V}{10\,\Omega} \cdot e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot t}$$

$$I(t) = 0{,}5\,A \cdot e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot}$$



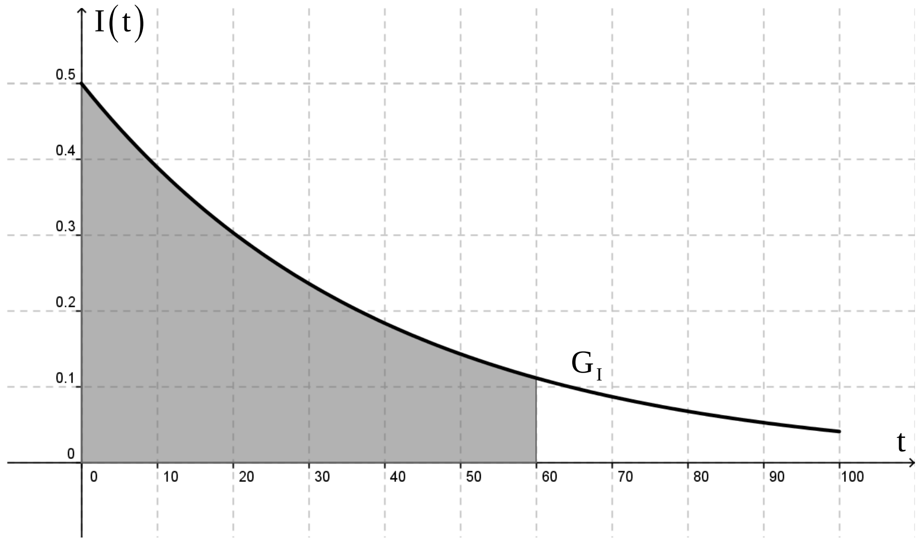
7 | 2.5 Die Stromstärke I ist definiert als die Ableitung der transportierten Ladung Q nach der Zeit t: $I(t)=\dot{Q}(t)$

Ermitteln Sie eine Gleichung, die den zeitlichen Verlauf der Ladung $Q(t)$ des Kondensators angibt, berechnen Sie $Q(60\,s)$ und veranschaulichen Sie diesen Wert im Diagramm der Aufgabe 2.4. Berechnen Sie außerdem $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t)$.

$$Q(t)=\int_0^t I(\tilde{t})\,d\tilde{t}=\int_0^t 0{,}5\,A\cdot e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot\tilde{t}}\,d\tilde{t}=\left[-20\,As\cdot e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot\tilde{t}}\right]_0^t$$

$$=-20\,As\cdot e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot t}-(-20\,As)=20\,As\left(1-e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot t}\right)$$

$$Q(60\,s)=20\,As\cdot\left(1-e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot 60\,s}\right)=20\,As\cdot\left(1-e^{-1{,}5}\right)\approx 15{,}54\,As$$



$$\lim_{t\to\infty} Q(t)=\lim_{t\to\infty} 20\,As\,(1-\underbrace{e^{-0{,}025\frac{1}{s}\cdot t}}_{\to 0})=20\,As$$

$\overline{70}$