2010 A I Angabe

BE	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto 4 \cdot \frac{1+\ln(1-x)}{1-x}$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.
3	1.1	Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}_f =]-\infty;1[$ gilt, und berechnen Sie den exakten Wert der Nullstelle der Funktion f.
4	1.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge.
7	1.3	Bestimmen Sie über die maximalen Monotonieintervalle Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von f. $\left[\text{Teilergebnis}: f'(x) = 4 \cdot \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}\right]$
3	1.4	Bestimmen Sie die Wertemenge der Funktion f mithilfe bisheriger Ergebnisse.
8	1.5	Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und ermitteln Sie die exakten Koordinaten seines Wendepunktes W.
5	1.6	Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt W und berechnen sie deren Schnittpunkt mit der x-Achse. $\left[\text{mögliches Teilergebnis}: t: y = \frac{2}{e} \cdot x + \frac{8\cdot\sqrt{e}-2}{e}\right]$
4	1.7	Zeichnen Sie mithilfe vorliegender Ergebnisse den Graphen der Funktion f und die Tangente t für $-6 \le x \le 0{,}7$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$.
8	1.8	Im zweiten Quadranten liegt ein Punkt $P(k; f(k))$ auf dem Graphen von f, dessen Koordinaten die Bedingung $f(k) = -k$ erfüllen. Entnehmen Sie Ihrem Graphen einen geeigneten Startwert k_0 und berechnen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens einen Näherungswert für die Stelle k. Führen Sie zwei Näherungsschritte durch und geben Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.
7	1.9	Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto -2 \cdot [\ln(1-x)]^2 - 4 \cdot \ln(1-x)$ in ihrer Definitionsmenge $\mathbb{D}_F = \mathbb{D}_f$ eine Stammfunktion der Funktion f ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstückes, das vom Graphen von f, der Tangente t und der y-Achse eingeschlossen wird. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.
	2.0	Das Hinterrad eines Traktors übt auf den Ackerboden an der Oberfläche einen Druck von $4{,}0 \cdot 10^4\,\text{Pa}$ aus. Der Druck nimmt mit zunehmender Tiefe unter der Oberfläche ab und beträgt in $1{,}0\,\text{m}$ Tiefe nur noch ein Viertel des Wertes an der Oberfläche. Für die Abhängigkeit des Drucks p in Pascal (Pa) von der Tiefe x in Metern gilt in einem mathematischen Modell die Funktionsgleichung $p(x) = a \cdot e^{-bx^2}$, wobei $x \ge 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Auf das Mitführen der Einheiten kann verzichtet werden.
3	2.1	Bestimmen Sie die Parameterwerte a und b. $\left[\text{Mögliches Ergebnis}: a = 4{,}0 \cdot 10^4, b = 2 \cdot \ln(2)\right]$
3	2.2	Stellen Sie den Druck p in Abhängigkeit von der Tiefe x für $0 \le x \le 1{,}5$ graphisch dar. Wählen Sie dazu selbst einen geeigneten Maßstab.
4	2.3	Entnehmen Sie Ihrem Diagramm die ungefähre Tiefe, in der der Druck halb so groß ist wie an der Oberfläche, und berechnen Sie dann diese Tiefe genau.

4	2.4	Berechnen Sie die lokale Änderungsrate des Drucks in $0{,}50\,\mathrm{m}$ Tiefe.
8	2.5	Bestimmen Sie, in welcher Tiefe die lokale Änderungsrate des Drucks betragsmäßig am größten ist, und berechnen Sie diese lokale Änderungsrate.
70		