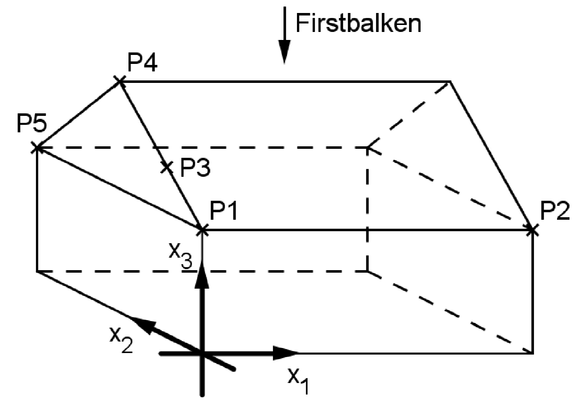
2009 B II Angabe

BE Ein denkmalgeschütztes, fast verfallenes Gebäude soll wieder aufgebaut werden. Nebenstehende Skizze zeigt den Originalzustand des Hauses in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die horizontale Grundfläche liegt in der x_1, x_2-Ebene. Durchgeführte Vermessungen haben ergeben, dass die Punkte $P_1(0;0;3)$, $P_2(10;0;3)$ und $P_3(0;2;4)$ auf der vorderen Dachfläche liegen.
Die Koordinaten geben die jeweilige Länge in Meter an, die Einheiten dürfen weggelassen werden.



4 | 1 Stellen Sie ein Gleichung in Koordinatenform für die Ebene E auf, in der die vordere Dachfläche liegt, und geben Sie die besondere Lage dieser Ebene im Koordinatensystem an.
$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: -x_2+2x_3-6=0\right]$

$$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-10\\20\end{pmatrix}=10\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{n}_E=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

P_1 in $E:-x_2+2x_3+c=0$ einsetzen: $2\cdot 3+c=0 \Rightarrow c=-6$

Somit folgt für die Ebene $E:-x_2+2x_3-6=0$

3 | 2 Der Winkel α zwischen der horizontalen Ebene und der Ebene E wird als Dachneigung bezeichnet. Berechnen Sie α.

Für den Winkel zwischen der Ebene E und der x_1-x_2-Ebene gilt: $\cos\alpha=\frac{\vec{e}_2\circ\overrightarrow{P_1P_4}}{\left|\vec{e}_2\right|\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|}$

Mit Hilfe de Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{e}_3$ gilt dann: $\cos\alpha=\left|\frac{\vec{n}_E\circ\vec{e}_3}{\left|\vec{n}_E\right|\cdot\left|\vec{e}_3\right|}\right|$

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{\vec{e}_3\circ\vec{n}_E}{\left|\vec{e}_3\right|\left|\vec{n}_E\right|}\right|=\frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\alpha=26,6^\circ$$

2 | 3 Die hintere Dachfläche liegt in der Ebene F, die durch die Gleichung $x_2 + 2x_3 - 20 = 0$ gegeben ist. Begründen Sie, dass die beiden Dachflächen die gleiche Dachneigung α besitzen, ohne den Winkel zwischen der horizontalen Ebene und der Ebene F zu berechnen.

Da der Normalenvektor der Ebene E sich nur im Vorzeichen der x_2-Koordinate vom Normalenvektor der Ebene F unterscheidet sind diese symmetrisch zu einer Ebene, welche parallel zur $x_1 - x_3 - \text{Ebene}$ ist. Somit sind auch die Ebenen E und F symmetrisch zu dieser Pallalelebene und somit auch ihre Schnittwinkel mit der Horizontalen.

4 | 4 Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden f, entlang der der Firstbalken des Daches verläuft.

$$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right]$$

Man bildet $E \cap F$:

$$\begin{array}{rl} -x_2 + 2x_3 - 6 = 0 & \\ x_2 + 2x_3 - 20 = 0 & + \quad \Rightarrow \quad x_2 + 13 - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 7 \\ \hline 4x_3 - 26 = 0 & \Rightarrow \quad x_3 = 6,5 \end{array}$$

Bleibt noch $x_1 = \lambda$ zu wählen. Somit folgt für die Schnittgerade f:

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 7 \\ 6,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6 | 5 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P_4 in der $x_2, x_3 - \text{Ebene}$ (siehe Skizze), die Sparrenlänge $\overline{P_1P_4}$ sowie den Flächeninhalt der gesamten Dachfläche.

Die Koordinaten des Punktes P_4 erhält man, indem man die Gerade f mit der $x_2 - x_3 - \text{Ebene}$ schneidet:

Die $x_2 - x_3 - \text{Ebene}$ hat die Koordinatenform $x_1 = 0$

Setzt man die Gerade f in $x_1 = 0$ ein, so folgt: $\lambda = 0$

Dann hat der Punkt P_4 die Koordinaten $P_4(0|7|6,5)$

Für die Sparrenlänge gilt:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-0 \\ 7-0 \\ 6,5-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3,5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 7^2 + 3,5^2} = \sqrt{61,25} = \tfrac{7}{2} \cdot \sqrt{5} \approx 7,826$$

Für die Dachfläche gilt:

$$A = 2 \cdot \left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| \cdot \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 2 \cdot \tfrac{7}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \left|\begin{pmatrix} 10-0 \\ 0-0 \\ 3-3 \end{pmatrix}\right| = 7 \cdot \sqrt{5} \cdot \left|\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| 7 \cdot \sqrt{5} \cdot 10 = 70 \cdot \sqrt{5} \approx 156,52$$

6 | 6 Der Sparren zwischen P_1 und P_4 soll vom Punkt $K(4;6;0)$ aus mit einer Stütze, die mit dem Sparren einen rechten Winkel einschließt, stabilisiert werden. Berechnen Sie die Länge dieser Stütze, sowie die Koordinaten ihres Befestigungspunktes L am Sparren.

Die Gleichung der Geraden durch P_1 und P_4 hat die Form:

$$h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\7\\3,5\end{pmatrix} \quad \text{oder auch } h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}+\eta\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \quad (\text{mit } \eta=3,5\cdot\mu)$$

Da der Punkt L auf der Geraden h liegt, folgt für seine Koordinaten: $L(0|2\eta|3+\eta)$

Da die Stütze mit dem Sparren einen rechten Winkel einschließt muss gelten:

$$\overrightarrow{KL}\perp h \;\Rightarrow\; \overrightarrow{KL}\circ\vec{u}_h=0$$

$$\begin{pmatrix}0-4\\2\eta-6\\3+\eta-0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}-4\\2\eta-6\\3+\eta\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=0 \;\Rightarrow\; 2\cdot(2\eta-6)+3+\eta=0$$

$$\Rightarrow\; 4\eta-12+3+\eta=0 \;\Rightarrow\; \eta=1,8$$

Somit hat L die Koordinaten $L(0|3,6|4,8)$

Für die Länge der Stütze folgt:

$$\left|\overrightarrow{KL}\right|=\left|\begin{pmatrix}-4\\2\cdot1,8-6\\3+1,8\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-4\\-2,4\\4,8\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-2,4)^2+4,8^2}=\sqrt{44,8}\approx6,693$$

5 | 7 Zur Bestimmung des Volumens des umbauten Raums ist zusätzlich der Punkt $P_5(0;14;3)$ gegeben. Gegenüberliegende Hauswände sind zueinander parallel. Berechnen Sie das Volumen des umbauten Raums sowie den prozentualen Anteil, den das Dachgeschoss davon einnimmt.

Die x_1 – Koordinate von P_2 gibt die Länge und die x_2 – Koordinate von P_5 die Breite der Grundfläche an. Die Höhe erhält man aus der x_3 – Koordinate des Punktes P_1.

Dann folgt für das Volumen des Erdgeschosses:

$$V_{EG}=\ell\cdot b\cdot h_{EG}=10\cdot14\cdot3=420$$

Aus der Differenz der x_3 – Koordinate des Punktes P_4 mit P_1 erhält man die Höhe des Dachgeschosses. Dann folgt für dessen Volumen:

$$V_{DG}=\tfrac{1}{2}\cdot\ell\cdot b\cdot h_{DG}=\tfrac{1}{2}\cdot10\cdot14\cdot(6,5-3)=245$$

Für das gesamte Volumen folgt: $V_{Ges}=420+245=665$

Der prozentuale Anteil der Dachgeschosses beträgt dann: $p=\dfrac{V_{DG}}{V_{Ges}}=\dfrac{245}{665}=\tfrac{7}{19}\approx36,8\%$

30