

## 2009 B I Lösung

$$1.1 \quad \overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-1 \\ -0,5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AC} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-1 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{AB} + \mu \cdot \overline{AC}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1,5 \\ 3-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \text{oder} \quad E: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} + 6 = 0$$

$$1.2 \quad \vec{d}_k = \begin{pmatrix} 11+k \\ 6+k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3  $D_k$  in E einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 11+k \\ 6+k \\ k \end{pmatrix} + 6 = 0$$

$$11+k - 2(6+k) + 2k + 6 = 0$$

$$k + 5 = 0$$

$$k = -5$$

$$\vec{d}_{-5} = \begin{pmatrix} 11-5 \\ 6-5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow D_{-5}(6|1|-5)$$

$$\begin{array}{r}
 1.4 \quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 = 0 \\
 \quad \quad 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3 = 0 \\
 \hline
 \quad \quad -3x_2 + 6x_3 + 15 = 0
 \end{array}
 \quad \cdot 2 \begin{array}{l} \lrcorner \\ \leftarrow \end{array}$$

Wähle  $x_3 = \lambda$

$$-3x_2 + 6\lambda + 15 = 0 \Rightarrow x_2 = 5 + 2\lambda$$

$$x_1 - 2(5 + 2\lambda) + 2\lambda + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 + 2\lambda$$

$$\Rightarrow \vec{s} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.5 Lotgerade mit  $D_s$  und  $\vec{n}_E$

$$l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$l$  in F einsetzen:

$$2(6 + 2\tau) - (1 - \tau) - 2(-5 - 2\tau) - 3 = 0$$

$$12 + 4\tau - 1 + \tau + 10 + 4\tau - 3 = 0$$

$$9\tau = -18$$

$$\tau = -2$$

in  $l$  eingesetzt:

$$\vec{\ell} = \overline{OL} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow L(2|3|-1)$$

Somit ist L Mittelpunkt der Strecke  $\overline{DD^*}$ ; somit gilt:

$$\vec{\ell} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{d} + \vec{d}^*) \Rightarrow \vec{d}^* = 2 \cdot \vec{\ell} - \vec{d}$$

$$\vec{d}^* = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow D^*(-2|5|3)$$

$$\begin{aligned}
2.1 \quad & 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 9,5 = t & 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= t - 9,5 \\
& x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 = 0 & \Rightarrow & x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -6 \\
& t(x_1 + x_2) - 6x_3 + 3 = 0 & & tx_1 + tx_2 - 6x_3 = -3
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
2 & -1 & -2 & t-9,5 \\
1 & -2 & 2 & -6 \\
t & t & -6 & -3 \\
\hline
2 & -1 & -2 & t-9,5 \\
0 & 3 & -6 & t+2,5 \\
0 & -3t & (12-2t) & t^2-9,5t+6 \\
\hline
2 & -1 & -2 & t-9,5 \\
0 & 3 & -6 & t+2,5 \\
0 & 0 & 12-8t & 2t^2-7t+6
\end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \cdot t \\ \cdot 2 \end{array} \right\} -$   
 $\left. \begin{array}{l} \cdot t \\ \cdot 2 \end{array} \right\} +$

Gilt  $12-8t \neq 0 \Rightarrow t_0 \neq 1,5$ , so ist  $\text{Rang}(A) = 3$ : Somit hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

Gilt  $12-8t = 0 \Rightarrow t_0 = 1,5$ , so ist  $\text{Rang}(A) = 2$ : Setzt man diesen Wert ( $t_0 = 1,5$ ) in die quadratische Gleichung ein, so folgt:  $2 \cdot 1,5^2 - 7 \cdot 1,5 + 6 = 0$ . Also ist auch  $\text{Rang}(A_{\text{erw}}) = 2$ : Somit hat das Gleichungssystem unendliche viele Lösungen.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist auch über Determinantenbetrachtungen lösbar.

$$\text{Det}(A) = 24 - 2t - 2t - 4t - 4t - 6 = 18 - 12t = 0 \Rightarrow t_0 = 1,5$$

Somit hat obiges Gleichungssystem für  $t_0 \neq 1,5$  eine eindeutige Lösung.

Da für mindestens eine Nebendeterminante für  $t_0 = 1,5$  gilt:  $\text{Det}(A_i) = 0$  mit  $i \in \{1; 2; 3\}$ , hat obiges Gleichungssystem für  $t_0 = 1,5$  unendlich viele Lösungen.

2.2 Mit Hilfe von 2.1 und  $t_0 = 1,5$  folgt:

$$\begin{array}{ccc|c}
2 & -1 & -2 & -8 \\
0 & 3 & -6 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Man wählt nun  $x_3 = \lambda$  und erhält:

$$3x_2 - 6\lambda = 4 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{3} + 2\lambda$$

und damit dann:

$$2x_1 - \left(\frac{4}{3} + 2\lambda\right) - 2\lambda = -8 \Rightarrow x_1 = -\frac{10}{3} + 2\lambda$$

Letztendlich folgt für die Schnittgerade:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$