2009 A II Lösung

1.1 $f_a(x)=\dfrac{2ax}{x^2+a}$

$N(x)=x^2+a=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=-a \quad\Rightarrow\quad x_{1/2}=\pm\sqrt{-a}$

1. Fall: $a>0$

$\mathbb{D}_a=\mathbb{R}$; Es gibt keine Definitionslücken

2. Fall: $a<0$

$\mathbb{D}_a=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{-a}\right\}$; Es gibt zwei einfache Polstellen (mit VZW)

1.2 $f_a(-x)=\dfrac{2a(-x)}{(-x^2)+a}=-\dfrac{2ax}{x^2+a}=-f_a(x)$

$\Rightarrow$ G_a ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

$$\lim_{|x|\to\infty} f_a(x)=\lim_{|x|\to\infty}\frac{\overbrace{2ax}^{\to\pm\infty}}{\underbrace{x^2+a}_{\to\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{|x|\to\infty}\frac{2a}{\underbrace{2x}_{\to\pm\infty}}=0 \quad\Rightarrow \text{ waagrechte Asymptote: } y=0$$

senkrechte Asymptoten: $x_1=-\sqrt{-a}$ und $x_2=\sqrt{-a}$ falls $a<0$.

1.3 $$f_a'(x)=\frac{(x^2+a)\cdot 2a-2ax\cdot 2x}{(x^2+a)^2}=\frac{2ax^2+2a^2-4ax^2}{(x^2+a)^2}=\frac{2a^2-2ax^2}{(x^2+a)^2}=\frac{2a(a-x^2)}{(x^2+a)^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad a-x^2=0$$
$$x^2=a$$
$$x_{1/2}=\pm\sqrt{a}$$

Für $a>0$ besitzt der Graph der Funktion f_a Extrempunkte:

x		$-\sqrt{a}$		$\sqrt{a}$	
$2a$	$+$		$+$		$+$
$a-x^2$	$-$		$+$		$-$
$(x^2+a)^2$	$+$		$+$		$+$
$f_a'(x)$	$-$		$+$		$-$
G_a	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		TP		HP	

1.4.1 $f_4(x)=\dfrac{8x}{x^2+4}$; $f_4'(x)=\dfrac{8(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_4=\mathbb{R}$

$f_4(-2)=-2 \quad\Rightarrow\quad TP(-2|-2)$

$f_4(2)=2 \quad\Rightarrow\quad HP(2|2)$

1.4.2 $f_4'(x)=\frac{8(4-x^2)}{(x^2+4)^2}=\frac{32-8x^2}{(x^2+4)^2}$

$$f_4''(x)=\frac{(x^2+4)^2\cdot(-16x)-(32-8x^2)\cdot 2\cdot(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4}$$

$$f_4''(x)=\frac{(x^2+4)\cdot(-16x)-(32-8x^2)\cdot 4x}{(x^2+4)^3}$$

$$f_4''(x)=\frac{-16x^3-64x-128x+32x^3}{(x^2+4)^3}$$

$$f_4''(x)=\frac{16x^3-192x}{(x^2+4)^3}$$

$$f_4''(x)=\frac{16x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}=0$$

$x_1=0$ oder $x^2-12=0$

$x^2=12$

$x_{2/3}=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$

x		$-2\sqrt{3}$		0		$2\sqrt{3}$	
$16x$	$-$		$-$		$+$		$+$
x^2-12	$+$		$-$		$-$		$+$
$(x^2+4)^3$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f_4''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
G_4	rk		lk		rk		lk
		WP_1		WP_2		WP_3	

G_4 ist rechtsgekrümmt für $x\in\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[0;2\sqrt{3}\right]$

G_4 ist linksgekrümmt für $x\in\left[-2\sqrt{3};0\right]\cup\left[2\sqrt{3};\infty\right[$

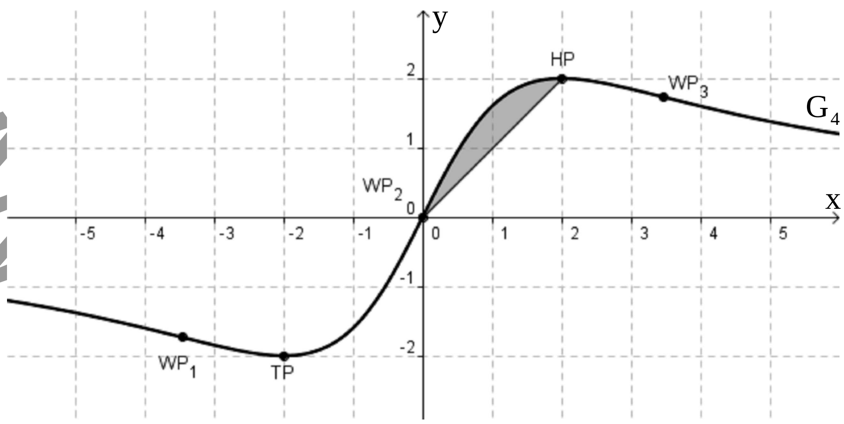
$f_4(-2\sqrt{3})=\frac{-8\cdot 2\sqrt{3}}{4\cdot 3+4}=-\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad WP_1(-2\sqrt{3}|-\sqrt{3})$

$f_4(0)=0 \quad\Rightarrow\quad WP_2(0|0)$

$f_4(2\sqrt{3})=\frac{8\cdot 2\sqrt{3}}{4\cdot 3+4}=\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad WP_3(2\sqrt{3}|\sqrt{3})$

1.4.3

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_4(x)$	-1,38	-1,6	-1,85	-2	-1,6	0	1,6	2	1,85	1,6	1,38



1.4.4 $F(x)=4\cdot\ln\left(x^2+4\right)$

Da $x^2+4>0$ folgt: $\mathbb{D}_F=\mathbb{R}$

$F'(x)=4\cdot\frac{2x}{x^2+4}=\frac{8x}{x^2+4}=f_4(x)\ \Rightarrow\ F(x)$ ist Stammfunktion von $f_4(x)$.

1.4.5 Schraffur

$$A=\int_0^2\left(f_4(x)-x\right)dx$$

$$A=\left[4\ln\left(x^2+4\right)-\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

$$A=4\ln(8)-2-\left(4\ln(4)-0\right)$$

$$A=4\ln(8)-4\ln(2)-2$$

$$A=4\left(\ln(8)-\ln(2)\right)-2$$

$$A=4\ln(2)-2$$

Mit $k_1=-2$ und $k_2=4$

1.4.6 Da g_m Ursprungsgerade ist und G_4 durch den Ursprung verläuft, so folgt, dass sich die beiden Funktionsgraphen im Ursprung schneiden.

Nach 1.4.2 hat der Graph G_4 seine maximale Steigung an der Stelle $x=0$ ($f_4''(x)$ hat einen VZW von „+“ nach „–“). Also gilt: $m_{max}=f_4'(0)=2$

Also gibt es nur einen Schnittpunkt für alle $m\geq 2$.

Da der Graph G_4 im 1. und 3. Quadranten verläuft gibt es ebenfalls nur einen Schnittpunkt für alle $m\leq 0$.

Alternativ lässt sich diese Aufgabe auch folgendermaßen lösen:

$$g_m(x) = f_4(x)$$
$$mx = \frac{8x}{x^2+4}$$
$$mx(x^2+4) = 8x$$
$$mx(x^2+4) - 8x = 0$$
$$x(mx^2+4m-8) = 0$$

Diese Gleichung hat die Lösung $x_1 = 0$ (also eine Schnittstelle) für alle $m \in \mathbb{R}$.

Damit es nun keine weiteren Schnittstellen gibt, darf die Gleichung $mx^2+4m-8=0$ keine weitere von 0 verschieden Lösung haben.

$$mx^2+4m-8=0$$
$$D = -4m(4m-8) = 32-16m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 0 \ \wedge \ m_2 = 2$$

Es muss also gelten: $D = -4m(4m-8) = 32-16m^2 < 0$

Also muss gelten: $m < 0$ oder $m > 2$

Doch was passiert für

$m = 0: \quad -8 = 0 \quad (f)$ also keine weitere Lösung (Schnittstelle)

$m = 2: \quad 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ also ebenfalls keine weitere Lösung (Schnittstelle)

Somit gibt es für $m \le 0$ und $m \ge 2$ nur einen einzigen Schnittpunkt.

2.1 $s(t) = 15 \cdot e^{-0,2t} \cdot \cos(3,927 \cdot t)$

$s(0,3) = 15 \cdot e^{-0,2 \cdot 0,3} \cdot \cos(3,927 \cdot 0,3) \approx 5,406$

$s_{max} = s(0) = 15 \cdot e^{-0,2t \cdot 0} \cdot \cos(3,927 \cdot 0) = 15$

2.2
$$s(t_k) = 0$$
$$\underbrace{15 \cdot e^{-0,2t_k}}_{>0} \cdot \underbrace{\cos(3,927 \cdot t_k)}_{=0} = 0$$
$$\cos(3,927 \cdot t_k) = 0$$
$$3,927 \cdot t_k = \tfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{mit } k \in \{0;1;2;...\}$$
$$t_k = \tfrac{\pi}{3,927}\left(\tfrac{1}{2} + k\right)$$

Den kleinsten Wert von t, für den $s = 0$ ist erhält man für $k = 0$: $t_0 = \frac{\pi}{2 \cdot 3,927} \approx 0,400$

Für das Zeitintervall Δt zweier benachbarter Nulldurchgänge gilt:

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k = \tfrac{\pi}{3,927}\left(\tfrac{1}{2} + k + 1\right) - \tfrac{\pi}{3,927}\left(\tfrac{1}{2} + k\right) = \tfrac{\pi}{3,927}\left(\tfrac{1}{2} + k + 1 - \tfrac{1}{2} - k\right) = \tfrac{\pi}{3,927} \approx 0,800 = \text{konst.}$$

2.3 $s(t) = 15 \cdot e^{-0,2t} \cdot \cos(3,927 \cdot t)$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = 15 \cdot (-0,2) \cdot e^{-0,2t} \cdot \cos(3,927 \cdot t) + 15 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-\sin(3,927 \cdot t)) \cdot 3,927$$
$$v(t) = -3 \cdot e^{-0,2t} \cdot \cos(3,927 \cdot t) - 58,905 \cdot e^{-0,2t} \cdot \sin(3,927 \cdot t)$$
$$v(0,3) = -3 \cdot e^{-0,2 \cdot 0,3} \cdot \cos(3,927 \cdot 0,3) - 58,905 \cdot e^{-0,2 \cdot 0,3} \cdot \sin(3,927 \cdot 0,3) \approx -52,333$$

Der Körper bewegt sich entgegengesetzt der positiven s-Achse.

2.4 Zu lösen ist also die Gleichung

$$s(t) = 6$$
$$\underbrace{s(t) - 6}_{f(t)} = 0$$

mit $f(t) = 15 \cdot e^{-0,2t} \cdot \cos(3{,}927 \cdot t) - 6$

und $\dot{f}(t) = \dot{s}(t) = v(t) = -3 \cdot e^{-0,2t} \cdot \cos(3{,}927 \cdot t) - 58{,}905 \cdot e^{-0,2t} \cdot \sin(3{,}927 \cdot t)$

Es gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} f(0{,}3) = s(0{,}3) - 6 = -0{,}594 & \text{nahe bei } 0 \\ \dot{f}(0{,}3) = v(0{,}3) = -52{,}333 & \text{sehr steil} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = 0{,}3 \text{ ist guter Startwert}$$

Für das Newton-Verfahren gilt: $t_{n+1} = t_n - \dfrac{f(t_n)}{\dot{f}(t_n)}$

n	t_n	$f(t_n)$	$\dot{f}(t_n)$
0	0,3	-0,594	-52,333
1	0,289	-0,022	-51,594
2	0,289		

Bei zwei Näherungsschritten erreicht man eine Genauigkeit von 3 Nachkommastellen.