

2008 B I – Lösung

1.1

$$\text{Det}(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC_k}) = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 2+k \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -10 + 10 + 4 \cdot (2+k) - 10 = 4k - 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow k \neq \frac{1}{2}$$

1.2

$$E_k: \vec{x} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{AB} + \mu \cdot \overline{AC_k}$$

$$E_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} k-3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da die beiden Richtungsvektoren \overline{AB} und $\overline{AC_k}$ offensichtlich linear unabhängig sind ($\overline{AB} \neq \tau \cdot \overline{AC_k}$) ist die Ebene E_k für alle $k \in \mathbb{R}$ eindeutig festgelegt.

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k-3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 4(k-3)+10 \\ -10-2(k-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4k-2 \\ -2k-4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{E_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix}$$

Oder auch so: Da $\vec{n}_{E_k} \neq \vec{0}$, ist die Ebene E_k eindeutig festgelegt.

$$E_k: \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$E_k: x_1 + (1-2k)x_2 + (2+k)x_3 - 1 + 2k = 0$$

1.3 Parallelität zur x_1 -Achse ($\Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \circ \vec{e}_1 = 0$):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow E_k \text{ ist nie parallel zur } x_1\text{-Achse}$$

Parallelität zur x_2 -Achse ($\Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \circ \vec{e}_2 = 0$):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1-2k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow E_{\frac{1}{2}} \text{ ist parallel zur } x_2\text{-Achse}$$

$$E_{\frac{1}{2}}: x_1 + 2,5x_3 = 0 \Rightarrow \text{Koordinatenursprung } (0|0|0) \in E_{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow x_2$ -Achse ist in der Ebene $E_{\frac{1}{2}}$ enthalten.

Parallelität zur x_3 -Achse ($\Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \circ \vec{e}_3 = 0$):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2+k = 0 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow E_2 \text{ ist parallel zur } x_3\text{-Achse}$$

$E_2: x_1 - 3x_2 + 3 = 0 \Rightarrow$ Koordinatenursprung $(0|0|0) \notin E_2$
 $\Rightarrow x_3$ -Achse ist echt parallel zur Ebene E_2 .

Da E_k für kein $k \in \mathbb{R}$ parallel zu zwei Koordinatenachsen ist, ist E_k auch nie parallel zu einer Koordinatenebene.

1.4 Schnitt mit der x_1 -Achse: $x_2 = x_3 = 0$

$$x_1 - 1 + 2k = 0 \Rightarrow x_1 = 1 - 2k \Rightarrow A_1(1 - 2k | 0 | 0)$$

Schnitt mit der x_2 -Achse: $x_1 = x_3 = 0$

$$(1 - 2k)x_2 - 1 + 2k = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1 - 2k}{1 - 2k} = 1 \quad (k \neq \frac{1}{2}) \Rightarrow A_2(0 | 1 | 0)$$

Schnitt mit der x_3 -Achse: $x_1 = x_2 = 0$

$$(k + 2)x_3 - 1 + 2k = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1 - 2k}{k + 2} \quad (k \neq -2) \Rightarrow A_3(0 | 0 | \frac{1 - 2k}{k + 2})$$

Damit alle vom Koordinatenursprung gleich weit entfernt sind muss gelten:

$$|\overline{OA_1}| = |\overline{OA_2}| = |\overline{OA_3}| = 1$$

$$\text{Also: } |\overline{OA_1}| = |1 - 2k| = 1 \Rightarrow 1 - 2k = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \Rightarrow |\overline{OA_3}| = \frac{1}{2} \neq 1 \\ k_2 = 1 \Rightarrow |\overline{OA_3}| = \frac{1}{3} \neq 1 \end{cases}$$

Somit gibt es kein $k \in \mathbb{R}$, so dass alle drei Achsenabschnitte gleich weit vom Koordinatenursprung entfernt sind.

Hinweis: Die Aufgabe 1.3 und 1.4 hätte man auch zusammen lösen können. Man bestimmt zuerst die Achsenabschnitte in Abhängigkeit von k und folgert dann für die Sonderfälle $k = \frac{1}{2}$ und $k = -2$ auf die Lage der entsprechenden Achse zur Ebene E_k .

$$\begin{array}{r}
 2.1 \quad E_1: x_1 - x_2 + 3x_3 + 1 = 0 \\
 E_2: x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3 = 0 \\
 \hline
 2x_2 - x_3 - 2 = 0
 \end{array}$$

Wähle $x_3 = \lambda$, dann folgt:

$$2x_2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 + \frac{1}{2}\lambda$$

$$x_1 - (1 + \frac{1}{2}\lambda) + 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,5\lambda$$

Nun folgt für die Schnittgerade g :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2,5\lambda \\ 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den Schnittwinkel der beiden Ebenen gilt:

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+1+9} \cdot \sqrt{1+9+16}} = \frac{16}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{26}} = 0,946... \Rightarrow \alpha = 18,9^\circ$$

Bemerkung: Da die Ebenen E_1 und E_2 aus den Ebenen E_k entstehen (für $k=1$ bzw. $k=2$) liegen die Punkte A und B sowohl auf der Ebene E_1 als auch auf der Ebene E_2 . Die Schnittmenge der beiden Ebenen E_1 und E_2 enthält somit die beiden Punkte A und B. Diese bilden dann die Schnittgerade $g_s = g(A, B)$.

2.2 Für die Ebene F gilt:

$$F: \begin{pmatrix} -2,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0 \Rightarrow F: -2,5x_1 + 0,5x_2 + x_3 = 0$$

g in F einsetzen:

$$-2,5 \cdot (-2,5\lambda) + 0,5 \cdot (1 + \frac{1}{2}\lambda) + \lambda = 0 \Rightarrow 6,25\lambda + 0,5 + \frac{1}{4}\lambda + \lambda = 0 \Rightarrow 7,5\lambda = -0,5$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{15} \text{ in } g \text{ einsetzen}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{29}{30} \\ -\frac{1}{15} \end{pmatrix} \Rightarrow S\left(\frac{1}{6} \mid \frac{29}{30} \mid -\frac{1}{15}\right)$$