2008 A II Lösung

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \dfrac{10}{1+e^x}$ in der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
4	1.1	Begründen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to \pm\infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_f an.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{10}{\underbrace{1+e^x}_{\to\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{10}{\underbrace{1+e^x}_{\to 1}} = 10$$

Man hat zwei waagrechte Asymptoten: $y_1 = 0$ und $y_2 = 10$

4	1.2	Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und geben Sie ihre Wertemenge an.

$$f(x) = \frac{10}{1+e^x}$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{-10e^x}^{<0}}{\underbrace{\left(1+e^x\right)^2}_{>0}} < 0 \quad \Rightarrow \quad G_f \text{ ist smf in } \mathbb{D}_f$$

$\backslash W_f =]0;10[$

6	1.3	Verschiebt man in einem kartesischen Koordinatensystem den Graphen G_f um 5 LE nach unten, so erhält man den Graphen G_{f^*} einer Funktion f^*. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f^*(x) = -f^*(-x)$, und geben Sie die Bedeutung dieses Zusammenhangs für den Verlauf des Graphen G_f an.

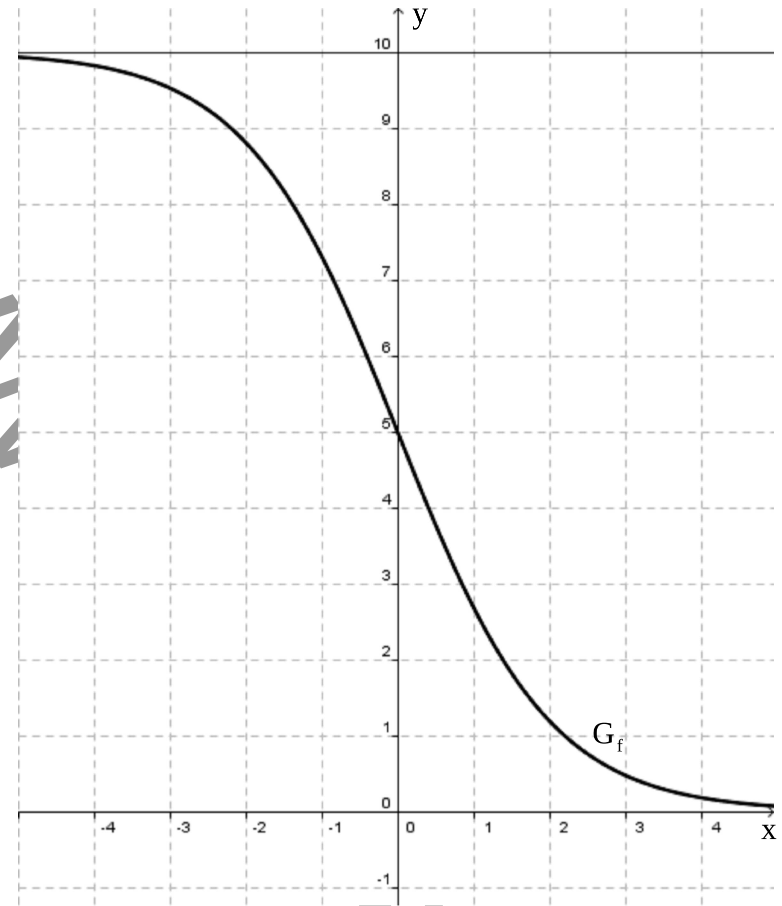
$$f^*(x) = f(x) - 5 = \frac{10}{1+e^x} - 5 = \frac{10-5\left(1+e^x\right)}{1+e^x} = \frac{5-5e^x}{1+e^x} = \frac{5\left(1-e^x\right)}{1+e^x}$$

$$f^*(-x) = \frac{5\left(1-e^{-x}\right)}{1+e^{-x}} = \frac{5\left(1-e^{-x}\right)e^x}{\left(1+e^{-x}\right)e^x} = \frac{5\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)} = \frac{-5\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)} = -f^*(x)$$

Das bedeutet, dass der Graph der Funktion f^* punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

Schiebt man den Graph der Funktion f^* um 5 LE nach oben, so erhält man den Graph der Funktion f. Somit ist der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Punkt $P(0|5)$.

4 1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten für $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab 1 LE = 1 cm.



1.5.0 Gegeben ist zusätzlich die Funktion $F: x \mapsto 10 \cdot x - 10 \cdot \ln(1+e^x)$ in der Definitionsmenge $D_F = D_f$.

5 1.5.1 Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist, und berechnen Sie $\int\limits_0^1 f(x)dx$. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

$F(x) = 10 \cdot x - 10 \cdot \ln(1+e^x)$

$F'(x) = 10 - 10 \cdot \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{10(1+e^x) - 10e^x}{1+e^x} = \frac{10 + 10e^x - 10e^x}{1+e^x} = \frac{10}{1+e^x} = f(x)$

Somit ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

$A = \int\limits_0^1 f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^1 = F(1) - F(0) = 10 - 10\ln(1+e) - (0 - 10 \cdot \ln(2))$

$A = 10(1 + \ln(2) - \ln(1+e)) = 10(\ln(e) + \ln(2) - \ln(1+e)) = 10\ln\left(\frac{2e}{1+e}\right) \approx 3{,}80$

7 1.5.2 Geben Sie das Steigungs- und das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion F an, bestimmen Sie die Gleichungen seiner Asymptoten und geben Sie die Wertemenge von F an.

Hinweis: Für $x \to \infty$ gilt $\ln(1+e^x) \to x$.

Da $F'(x) = f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x)$ sms in $\mathbb{D}_F$.

Da $F''(x) = f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x)$ in $\mathbb{D}_F$ rechtsgekrümmt.

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\left(10\cdot x - 10\cdot\ln\left(1+e^x\right)\right) = \underbrace{10\cdot\lim_{x\to\infty} x - 10\cdot\lim_{x\to\infty}\underbrace{\ln\left(1+e^x\right)}_{\to x}}_{\to 10x} = 0$$

Somit hat man eine waagechte Asymptote mit der Gleichung : $y = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(10\cdot x - 10\cdot\ln\left(1+e^x\right)\right) = \lim_{x\to-\infty} 10\cdot x - 10\cdot\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\ln\left(1+e^x\right)}_{\to 0} \to -\infty$$

Aus obiger Zeile erkennt man, dass $F(x)$ von der Form $F(x) = F_A(x) + R(x)$ mit $\lim\limits_{x\to-\infty} R(x) = 0$. Somit ist $F_A(x) = 10\cdot x$ eine schiefe Asymptote von $F(x)$.

Für die Wertemenge von $F(x)$ gilt dann: $\mathbb{W}_F = \left]-\infty;0\right[$.

1.6.0 Gegeben ist zusätzlich die Funktion $g: x \mapsto \frac{10}{1+e^{2-x}}$ in der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion g wird mit G_g bezeichnet. Außerdem ist bekannt, dass für die Ableitungsfunktion g' in der Definitionsmenge $D_{g'} = \mathbb{R}$ gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{10}\cdot g(x)\cdot\left[(10 - g(x)\right]$$

4 1.6.1 Begründen Sie mit Hilfe der gegebenen Funktionsgleichung von g', dass in der gesamten Definitionsmenge D_g der Graph G_g streng monoton steigt.

$$g'(x) = \frac{1}{10}\cdot g(x)\cdot\left[10 - g(x)\right] = \frac{1}{10}\cdot\frac{10}{1+e^{2-x}}\cdot\left[10 - \frac{10}{1+e^{2-x}}\right] = \frac{1}{1+e^{2-x}}\cdot\left[\frac{10\left(1+e^{2-x}\right)-10}{1+e^{2-x}}\right]$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+e^{2-x}}\cdot\left[\frac{10\cdot e^{2-x}}{1+e^{2-x}}\right] = \frac{\overbrace{10\cdot e^{2-x}}^{>0}}{\underbrace{\left(1+e^{2-x}\right)^2}_{>0}} > 0$$

Somit ist der Graph der Funktion $g(x)$ in $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

3 *1.6.2 Zeigen Sie die Richtigkeit der Gleichung:* $g'(x) = \frac{1}{10} \cdot g(x) \cdot [(10 - g(x)]$

$$g(x) = \frac{10}{1+e^{2-x}}$$

$$g'(x) = \frac{-10 \cdot e^{2-x} \cdot (-1)}{\left(1+e^{2-x}\right)^2} = \frac{10 \cdot e^{2-x}}{\left(1+e^{2-x}\right)^2} = \frac{1}{10} \cdot g(x) \cdot [(10 - g(x)] \quad (\text{Umformung siehe } 1.6.1)$$

9 1.6.3 Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_g sowie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen G_g, die durch dessen Wendepunkt verläuft.

$$g'(x) = \frac{10 \cdot e^{2-x}}{\left(1+e^{2-x}\right)^2}$$

$$g''(x) = \frac{-10 \cdot e^{2-x} \cdot \left(1+e^{2-x}\right)^2 - 10 \cdot e^{2-x} \cdot 2 \cdot \left(1+e^{2-x}\right) \cdot e^{2-x} \cdot (-1)}{\left(1+e^{2-x}\right)^4}$$

$$g''(x) = \frac{-10 \cdot e^{2-x} \cdot \left(1+e^{2-x}\right) + 10 \cdot e^{2-x} \cdot 2 \cdot e^{2-x}}{\left(1+e^{2-x}\right)^3}$$

$$g''(x) = \frac{-10 \cdot e^{2-x} - 10 \cdot \left(e^{2-x}\right)^2 + 20 \cdot \left(e^{2-x}\right)^2}{\left(1+e^{2-x}\right)^3}$$

$$g''(x) = \frac{-10 \cdot e^{2-x} + 10 \cdot \left(e^{2-x}\right)^2}{\left(1+e^{2-x}\right)^3}$$

$$g''(x) = \frac{10 \cdot e^{2-x} \cdot \left(e^{2-x} - 1\right)}{\left(1+e^{2-x}\right)^3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{2-x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2-x} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 2$$

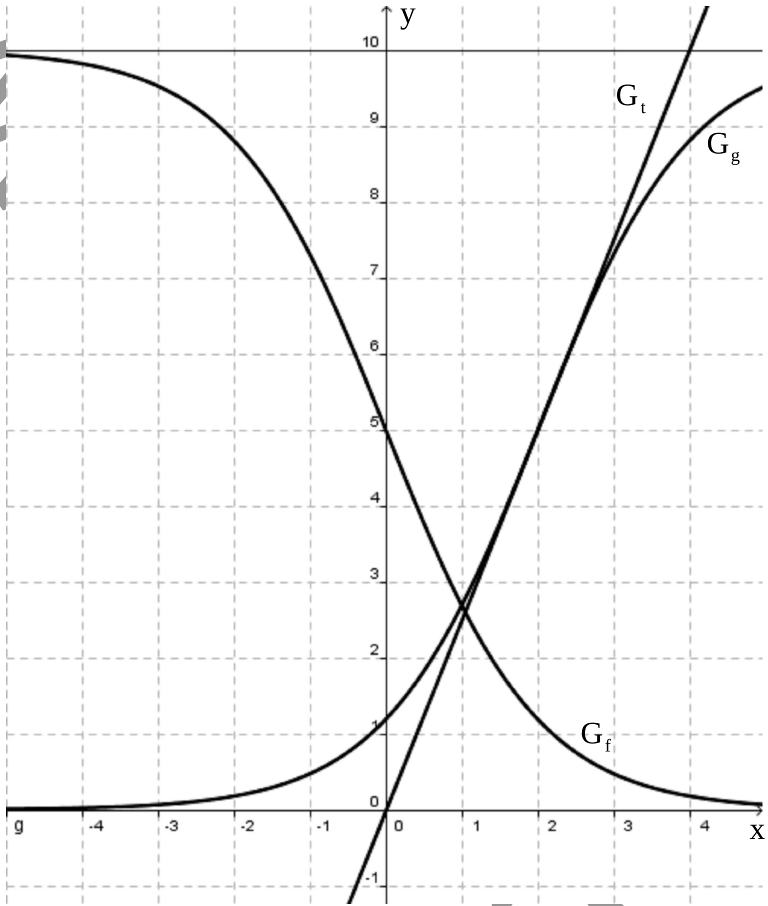
	$x < 2$	2	$x > 2$
$10e^{2-x}$	+		+
$e^{2-x} - 1$	−		+
$\left(1+e^{2-x}\right)^3$	+		+
$g''(x)$	−	WP	+

$$\left.\begin{array}{l} g(2)=5 \quad \Rightarrow \quad WP(2|5) \\ g'(2)=\frac{10}{4}=2{,}5=m_W \end{array}\right\} \text{ in } y=mx+t_0 \text{ einsetzen}$$

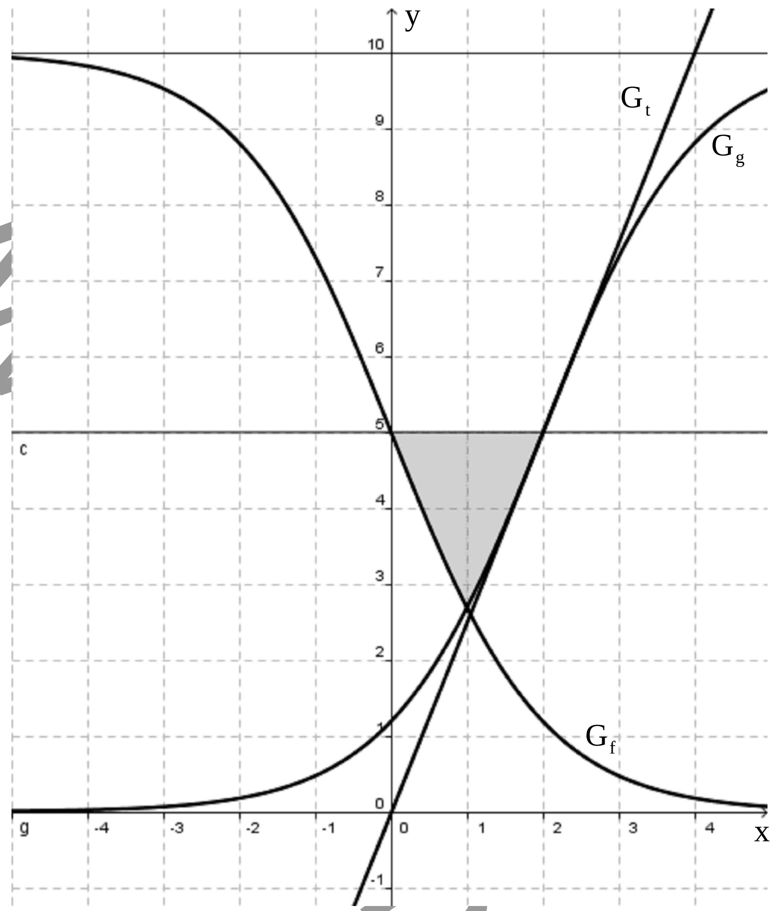
$$5=2\cdot 2{,}5+t_0 \quad \Rightarrow \quad t_0=0$$

Wendetangente $t: y=2{,}5x$

4 1.6.4 Zeichnen Sie für $-4\le x\le 4$ den Graphen G_g und die Tangente t in das Koordinatensystem der Aufgabe 1.4.



4 1.8 Die Graphen G_f und G_g schließen zusammen mit der Geraden y = 5 ein Flächenstück ein. Schraffieren Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem der Aufgabe 1.4 und berechnen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus der Aufgabe 1.5.1 seine Flächenmaßzahl auf eine Nachkommastelle gerundet.

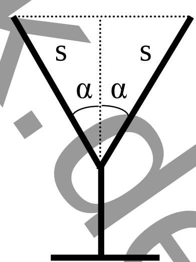


$$A = 2\cdot\int_0^1 \left(5 - f(x)\right)dx = 2\cdot\left[5x - F(x)\right]_0^1 = 2\cdot\left[5x - \left(10\cdot x - 10\cdot\ln\left(1+e^x\right)\right)\right]_0^1$$

$$A = 2\cdot\left[10\cdot\ln\left(1+e^x\right) - 5x\right]_0^1 = 2\cdot\left[10\cdot\ln\left(1+e\right) - 5 - 10\cdot\ln\left(2\right)\right]$$

$$A = 20\cdot\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - 10 \approx 2,40$$

2.0 Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels erhalten (siehe Skizze). Das vorgegebene Innenmaß der Mantellinie wird mit s und der „halbe“ Öffnungswinkel mit α bezeichnet. Für α gilt $0° < \alpha < 90°$.



3 2.1 Stellen Sie die Volumenmaßzahl $V(\alpha)$ des Kelchs in Abhängigkeit von α dar.

Mit $\sin\alpha = \frac{r}{s} \Rightarrow r = s\cdot\sin\alpha$ und $\cos\alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow h = s\cdot\cos\alpha$ folgt:

$V = \frac{1}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot s^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot s \cdot \cos\alpha = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$

$V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$

mit $\mathbb{D}_V =]0°; 90°[$

10 2.2 Bestimmen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung den Winkel α so, dass der Kelch das größtmögliche Volumen besitzt.

$V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$

$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \left(2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sin^2\alpha \cdot (-\sin\alpha)\right)$

$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \left(2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha\right)$

$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin\alpha\left(2 \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$

$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin\alpha\left(2 \cdot \left(1 - \sin^2\alpha\right) - \sin^2\alpha\right)$

$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin\alpha\left(2 - 3\sin^2\alpha\right) = 0$

$\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0° \notin \mathbb{D}_V$ oder $\alpha_2 = 180° \notin \mathbb{D}_V$

$2 - 3\sin^2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = +\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 54,74°$

Bemerkung: $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ führt auf negative Winkel!

α	0°		$\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$		90°
$\frac{\pi}{3} \cdot s^3$		+		+	
$2 - 3\sin^2\alpha$		+		−	
$\sin\alpha$		+		+	
$\frac{dV}{d\alpha}$		+	HP	−	

Der Kelch hat sein größtmögliches Volumen für $\alpha_{max} = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 54,74°$

Nicht mehr verlangt:

$V_{max} = V\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin^2\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cdot \cos\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 0,40 \cdot s^3$

70