2008 A II Angabe

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{10}{1+e^x}$ in der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
4	1.1	Begründen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to \pm\infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_f an.
4	1.2	Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und geben Sie ihre Wertemenge an.
6	1.3	Verschiebt man in einem kartesischen Koordinatensystem den Graphen G_f um 5 LE nach unten, so erhält man den Graphen G_{f^*} einer Funktion f^*. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f^*(x) = -f^*(-x)$, und geben Sie die Bedeutung dieses Zusammenhangs für den Verlauf des Graphen G_f an.
4	1.4	Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten für $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab 1 LE = 1 cm.
	1.5.0	Gegeben ist zusätzlich die Funktion $F: x \mapsto 10 \cdot x - 10 \cdot \ln(1+e^x)$ in der Definitionsmenge $D_F = D_f$.
5	1.5.1	Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist, und berechnen Sie $\int_0^1 f(x)dx$. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.
7	1.5.2	Geben Sie das Steigungs- und das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion F an, bestimmen Sie die Gleichungen seiner Asymptoten und geben Sie die Wertemenge von F an. Hinweis: Für $x \to \infty$ gilt $\ln(1+e^x) \to x$.

1.6.0 Gegeben ist zusätzlich die Funktion $g: x \mapsto \dfrac{10}{1+e^{2-x}}$ in der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion g wird mit G_g bezeichnet. Außerdem ist bekannt, dass für die Ableitungsfunktion g' in der Definitionsmenge $D_{g'} = \mathbb{R}$ gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{10} \cdot g(x) \cdot [(10 - g(x)]$$

4 1.6.1 Begründen Sie mit Hilfe der gegebenen Funktionsgleichung von g', dass in der gesamten Definitionsmenge D_g der Graph G_g streng monoton steigt.

3 1.6.2 Zeigen Sie die Richtigkeit der Gleichung: $g'(x) = \dfrac{1}{10} \cdot g(x) \cdot [(10 - g(x)]$

[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{10 \cdot e^{2-x}}{(1+e^{2-x})^2}$]

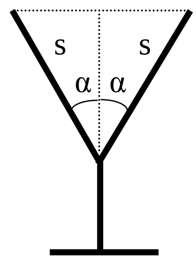
9 1.6.3 Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_g sowie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen G_g, die durch dessen Wendepunkt verläuft.

4 1.6.4 Zeichnen Sie für $-4 \le x \le 4$ den Graphen G_g und die Tangente t in das Koordinatensystem der Aufgabe 1.4.

3 1.7 Weisen Sie nach, dass zwischen den Funktionswerten der Funktion f aus Aufgabe 1.0 und der Funktion g aus 1.6.0 für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $f(1-x) = g(1+x)$ gilt, und interpretieren Sie diese Beziehung geometrisch.

4 1.8 Die Graphen G_f und G_g schließen zusammen mit der Geraden y = 5 ein Flächenstück ein. Schraffieren Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem der Aufgabe 1.4 und berechnen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus der Aufgabe 1.5.1 seine Flächenmaßzahl auf eine Nachkommastelle gerundet.

2.0 Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels erhalten (siehe Skizze). Das vorgegebene Innenmaß der Mantellinie wird mit s und der „halbe“ Öffnungswinkel mit α bezeichnet. Für α gilt $0° < \alpha < 90°$.



3 | 2.1 Stellen Sie die Volumenmaßzahl $V(\alpha)$ des Kelchs in Abhängigkeit von α dar.

[Mögliches Ergebnis: $V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot (\sin\alpha)^2 \cdot \cos\alpha$]

10 | 2.2 Bestimmen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung den Winkel α so, dass der Kelch das größtmögliche Volumen besitzt.

70