

2008 A I – Lösung

$$\begin{aligned}
 1.1 \quad p(h_H) &= 1013 \cdot 2^{-\frac{h_H}{5,5}} = \frac{1}{2} \cdot 1013 \\
 2^{-\frac{h_H}{5,5}} &= 2^{-1} \\
 -\frac{h_H}{5,5} &= -1 \\
 h_H &= 5,5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.2 \quad p(h_A + h_H) &= p(h_A + 5,5) = 1013 \cdot 2^{-\frac{h_A + 5,5}{5,5}} = 1013 \cdot 2^{-\frac{h_A}{5,5} - 1} = 1013 \cdot 2^{-\frac{h_A}{5,5}} \cdot 2^{-1} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1013 \cdot 2^{-\frac{h_A}{5,5}} = \frac{1}{2} \cdot p(h_A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.3 \quad p(h) &< \frac{1}{1000} \cdot p(h_0 = 0) \\
 1013 \cdot 2^{-\frac{h}{5,5}} &< 0,001 \cdot 1013 \cdot 2^0 \\
 2^{-\frac{h}{5,5}} &< 0,001 \quad | \ln(\dots) \\
 -\frac{h}{5,5} \cdot \ln 2 &< \ln 0,001 \\
 -\frac{h}{5,5} &< \frac{\ln 0,001}{\ln 2} \\
 h &> -5,5 \cdot \frac{\ln 0,001}{\ln 2} \\
 h &> 54,8
 \end{aligned}$$

$$1.4 \quad 1013 \cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5} \cdot h} = 1013 \cdot e^{\ln 0,5 \cdot \frac{h}{5,5}} = 1013 \cdot (e^{\ln 0,5})^{\frac{h}{5,5}} = 1013 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5,5}} = 1013 \cdot 2^{-\frac{h}{5,5}} = p(h)$$

oder auch:

$$\begin{aligned}
 p(h) &= 1013 \cdot 2^{-\frac{h}{5,5}} = 1013 \cdot e^{\ln 2^{-\frac{h}{5,5}}} = 1013 \cdot e^{\frac{h}{5,5} \cdot \ln 2^{-1}} = 1013 \cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5} \cdot h} \\
 \frac{dp(h)}{dh} &= 1013 \cdot \frac{\ln 0,5}{5,5} \cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5} \cdot h}
 \end{aligned}$$

$$1.5 \quad \frac{p(1) - p(0)}{1 - 0} = \frac{1013 \cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5} \cdot 1} - 1013 \cdot e^0}{1} = 1013 \cdot (0,8816 - 1) = 1013 \cdot (-0,1184) = -120,0$$

Die mittlere Druckabnahme pro km von $h_0 = 0$ km bis $h = 1$ km beträgt -120 hPa.

$$\frac{dp(1)}{dh} = 1013 \cdot \frac{\ln 0,5}{5,5} \cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5} \cdot 1} = -127,67 \cdot e^{-0,126} = -112,5$$

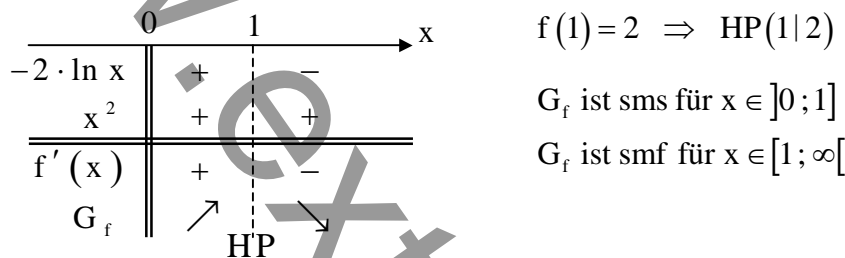
Die momentane Druckabnahme pro km in der Höhe $h = 1$ km beträgt $-112,5$ hPa.

$$2.1 \quad f(x) = 2 \cdot \frac{1 + \ln x}{x} = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x_N = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\overbrace{1 + \ln x}^{\rightarrow \infty}}{\underbrace{x}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

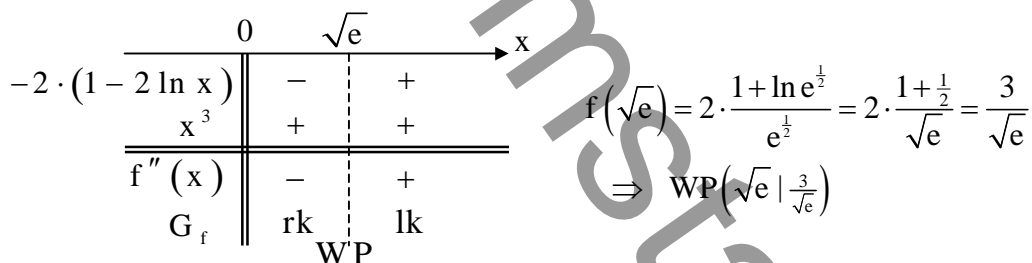
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \cdot \frac{\overbrace{1 + \ln x}^{\rightarrow -\infty}}{\underbrace{x}_{\rightarrow 0}} \rightarrow -\infty$$

$$2.2 \quad f'(x) = 2 \cdot \frac{x \cdot \frac{1}{x} - (1 + \ln x)}{x^2} = 2 \cdot \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -2 \cdot \frac{\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x_E = 1$$



$$2.3 \quad f''(x) = -2 \cdot \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - 2x \cdot \ln x}{x^4} = -2 \cdot \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = -2 \cdot \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_W = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$



$$2.4 \quad \text{Gerade durch } P(a | f(a)) \text{ mit der Steigung } m = f'(a) = -2 \cdot \frac{\ln a}{a^2}$$

$$2 \cdot \frac{1 + \ln a}{a} = -2 \cdot \frac{\ln a}{a^2} \cdot a + t \quad (\text{aber } t = 0!)$$

$$2 \cdot \frac{1 + \ln a}{a} = -2 \cdot \frac{\ln a}{a}$$

$$1 + \ln a = -\ln a$$

$$2 \ln a = -1$$

$$\ln a = -\frac{1}{2}$$

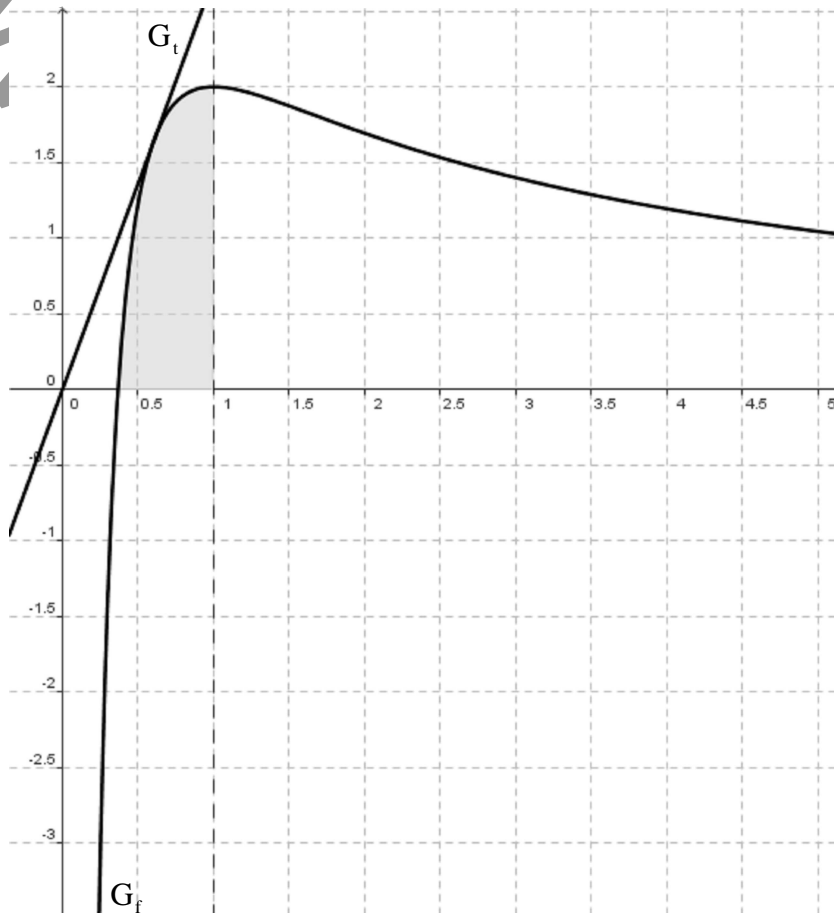
$$a = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$m = f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -2 \cdot \frac{\ln e^{-\frac{1}{2}}}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = e$$

$$\text{Tangentengleichung: } y = e \cdot x$$

2.5

x	0,25	$\frac{1}{e} \approx 0,37$	$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61$	1	$\sqrt{e} \approx 1,65$	2	3	4	5
y	-3,1	0	$\sqrt{e} \approx 1,65$	2	$\frac{3}{\sqrt{e}} \approx 1,82$	1,7	1,4	1,2	1,0
		N	P	HP	WP				



$$2.6 \quad F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x + 2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x + 1) = 2 \cdot \frac{1 + \ln x}{x} = f(x)$$

HP(1|2) \in G_f , somit gilt: $F''(1) = f'(1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ ist Nullstelle (mit Vorzeichenwechsel!) von F''

$\Rightarrow G_f$ hat an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt.

$$F'(1) = f(1) = 2 = m_w$$

\Rightarrow Wendepunkt von G_f hat die Steigung $m_w = 2$.

2.7 G_F ist smf für $x \in]0, \frac{1}{e}]$

G_F ist sms für $x \in [\frac{1}{e}, \infty[$

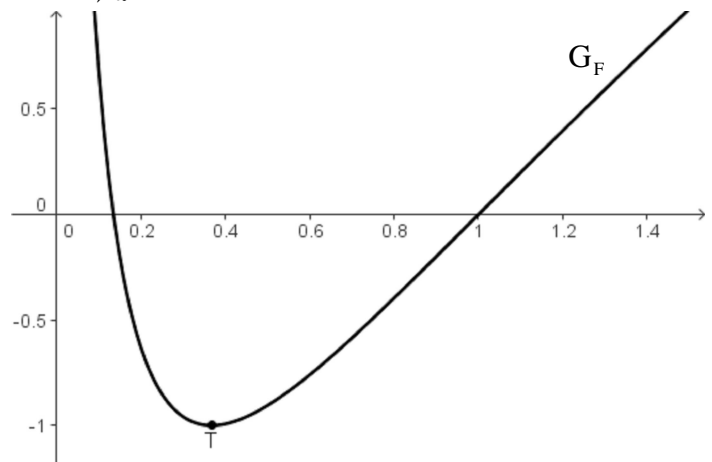
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} ((\ln x)^2 + 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{(\ln x)^2}_{\rightarrow \infty} + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\ln x}_{\rightarrow \infty} \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} ((\ln x)^2 + 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\ln x}_{\rightarrow -\infty} \cdot \underbrace{(\ln x + 2)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow \infty$$

$$F(e^{-2}) = 0$$

$$F(e^{-1}) = F(0,37...) = -1 \quad \text{TP von } G_F$$

$$F(e^0) = F(1) = 0$$



2.8 $A(b) = \int_{\frac{1}{e}}^b f(x) dx = [(\ln x)^2 + 2 \cdot \ln x]_{\frac{1}{e}}^b = (\ln b)^2 + 2 \cdot \ln b - ((\ln e^{-1})^2 + 2 \cdot \ln e^{-1})$

$$A(b) = (\ln b)^2 + 2 \cdot \ln b - (1 - 2) = (\ln b)^2 + 2 \cdot \ln b + 1$$

2.9 $A(b) = (\ln b)^2 + 2 \cdot \ln b + 1 = 9$

$$(\ln b)^2 + 2 \cdot \ln b - 8 = 0$$

Substitution: $\ln b = u$

$$u^2 + 2u - 8 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

Rücksubstitution:

$$\ln b = 2 \quad \ln b = -4$$

$$b_1 = e^2 \quad (b_2 = e^{-4} = \frac{1}{e^4} < \frac{1}{e}) \quad \text{nicht möglich!}$$

Eine etwas genialere Lösung:

$$A(b) = (\ln b)^2 + 2 \cdot \ln b + 1 = 9 \Rightarrow (\ln(b) + 1)^2 = 9 \Rightarrow \ln(b) + 1 = \pm 3$$

$$\Rightarrow \ln(b) = \begin{cases} 2 & \Rightarrow b_1 = e^2 \\ -4 & \Rightarrow b_2 = e^{-4} < e^{-1} \quad \text{nicht möglich} \end{cases}$$

$$2.10 \quad A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot f(a) = \frac{1}{2} \cdot e^{-0,5} \cdot 2 \cdot \frac{1 + \ln e^{-0,5}}{e^{-0,5}} = 1 + \ln e^{-0,5} = 0,5$$

$$A(a) = A(e^{-0,5}) = (\ln e^{-0,5})^2 + 2 \cdot \ln e^{-0,5} + 1 = 0,25 - 1 + 1 = 0,25$$

$$A_0 = A_{\Delta} - A(a) = 0,5 - 0,25 = 0,25$$

www.extremstark.de