

2007 B II Lösung

BE 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 sind der Punkt $A(0;1;2)$ und die Punktmenge $B_k(1;2k;3k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

2 1.1 Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{R}$ die Punkte B_k auf einer Geraden g liegen und geben Sie die Gleichung dieser Geraden g an.

$$\vec{b}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2k \\ 3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4 1.2 Ermitteln Sie, welcher der Punkte B_k dem Punkt A am nächsten liegt.

$$\overrightarrow{AB_k} \circ \vec{u}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2k-1 \\ 3k-2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4k-2+9k-6 = 13k-8 = 0 \Rightarrow k = \frac{8}{13}$$

$B_{\frac{8}{13}}(1; \frac{16}{13}; \frac{24}{13})$ liegt dem Punkt A am nächsten.

3 1.3 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform, in der der Punkt A und alle Punkte B_k liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{n}_E \circ (\vec{x} - \vec{OA}) = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$E: x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 1 = 0$$

2.0 Gegeben ist nun zusätzlich die Ebene $F: x_2 + x_3 - 4 = 0$.

6 2.1 Die Ebenen E (Aufgabe 1.3) und F schneiden sich in der Geraden s . Berechnen Sie den Schnittwinkel α der beiden Ebenen und eine Gleichung der Schnittgeraden s .

[Mögliches Teilergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$]

- 6 2.2 Geben Sie die Lotgerade auf die Ebene F durch den Punkt A(0; 1; 2) an und ermitteln Sie mit ihrer Hilfe den Abstand des Punktes A von der Ebene F.
- 3.0 Gegeben sind nun zusätzlich die Ebenen $H_a : x_1 + ax_2 - x_3 - 2 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$.
- 2 3.1 Zeigen Sie, dass unabhängig von a jede Ebene H_a weder zur Ebene E (Aufgabe 1.3) noch zur Ebene F (siehe 2.0) parallel ist.
- 4 3.2 Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Schnittmenge $E \cap F \cap H_a$ leer ist und verdeutlichen Sie anhand einer Skizze die gegenseitige Lage der drei Ebenen.
- 3 3.3 Setzen Sie $a = 2$ und bestimmen Sie die Schnittmenge $E \cap F \cap H_2$.