# 2007 A II Lösung

*BE*

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \ln(x^2+1)$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

*4* 1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f sowie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $|x| \to \infty$.

$f(-x) = \ln\left((-x)^2+1\right) = \ln\left(x^2+1\right) = f(x) \;\Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(x^2+1\right) \to \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to \infty$ (wegen Symmetrie!)

*3* 1.2 Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und geben Sie ihre Wertemenge $W_f$ an.

$f(x) = \ln\left(x^2+1\right) = 0 \;\Rightarrow\; x^2+1=1 \;\Rightarrow\; x^2=0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;\; (2x)$

$W_f = [0;\infty[$

*5* 1.3 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und geben Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von f an.

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $2x$ | $-$ | | $+$ |
| $x^2+1$ | $+$ | | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $G_f$ | ↘ | TP | ↗ |

$G_f$ ist streng monoton fallend für $x \in ]-\infty;0]$

$G_f$ ist streng monoton steigend für $x \in [0;\infty[$

$f(0) = 0 \;\Rightarrow\; TP(0|0)$

6 1.4 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und geben Sie die Koordinaten seiner Wendepunkte an.

[ Teilergebnis: $f''(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ ]

$$f''(x) = \frac{\left(x^2+1\right)\cdot 2 - 2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2-2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1$$

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2-2x^2$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |
| $\left(x^2+1\right)^2$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |
| $G_f$ | rk | WP | lk | WP | rk |

$G_f$ ist rechtsgekrümmt für $x \in \left]-\infty;-1\right]$ und für $x \in \left[1;\infty\right[$

$G_f$ ist linksgekrümmt für $x \in \left[-1;1\right]$

$f\left(\pm 1\right) = \ln\left(2\right) \quad \Rightarrow \quad WP_1\left(-1 \mid \ln\left(2\right)\right) \quad WP_2\left(1 \mid \ln\left(2\right)\right)$

5 1.5 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte der Ableitungsfunktion $f'$ für $|x| \to \infty$ und geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von $f'$ an.

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{2x}^{\to\infty}}{\underbrace{x^2+1}_{\to\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{2x}^{\to-\infty}}{\underbrace{x^2+1}_{\to\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Die Extrempunkte des Graphen von $f'$ sind die Wendepunkte des Graphen von f:

$E_1\left(-1 \mid \ln\left(2\right)\right) \quad E_2\left(1 \mid \ln\left(2\right)\right)$

Aufgrund des Vorzeichenwechsels von $f''$ folgt sogar, dass $E_1$ ein relativer Tiefpunkt und $E_2$ ein relativer Hochpunkt ist.

8 | 1.6 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von $f'$ und geben Sie die Koordinaten seiner Wendepunkte an.

Das Krümmungsverhalten von $f'$ wird durch $f'''$ angegeben.

$$f'''(x)=\frac{\left(x^2+1\right)^2\cdot(-4x)-\left(2-2x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-4x^3-4x-8x+8x^3}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{4x^3-12x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{4x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=0$$

$$x_1=0;\quad x^2-3=0\quad\Rightarrow\quad x_{2/3}=\pm\sqrt{3}$$

| $x$ | | $-\sqrt{3}$ | | $0$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $x^2-3$ | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $\left(x^2+1\right)^3$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $f'''(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| $G_{f'}$ | rk | | lk | | rk | | lk |
| | | WP | | WP | | WP | |

Für die Wendepunkte des Graphen von $f'$ folgt somit:

$f'\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad WP_1\left(-\sqrt{3}\,\middle|\,-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$f'(0)=0$ $\quad WP_2\left(0\,|\,0\right)$

$f'\left(\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad WP_3\left(\sqrt{3}\,\middle|\,\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

6 | 1.8 Die Graphen von f und $f'$ schneiden sich an den Stellen $x_1$ und $x_2$, wobei $x_1 < x_2$. Bestimmen Sie $x_2$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Verwenden Sie als Startwert $x_0=1{,}3$ und führen Sie einen Näherungsschritt durch. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.

$$f(x)=f'(x)$$

$$\ln\left(x^2+1\right)=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\underbrace{\ln\left(x^2+1\right)-\frac{2x}{x^2+1}}_{h(x)}=0$$

$$h(x)=\ln\left(x^2+1\right)-\frac{2x}{x^2+1}=0$$

$$h'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Startwert: $x_0=1{,}3$

$h(1,3) = 0,023$

$h'(1,3) = 1,157$

Es gilt: $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$

Somit folgt für $x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 1,3 - \frac{0,023}{1,157} = 1,280$

4 1.9 Berechnen Sie $\int_0^a f'(x)dx$ für eine positive reelle Zahl a, prüfen Sie, ob der Grenzwert

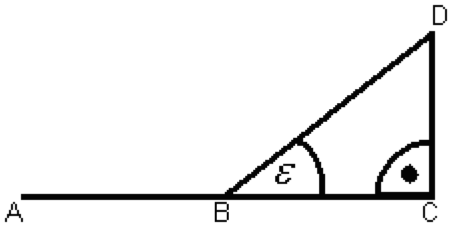
$\lim_{a\to\infty} \int_0^a f'(x)dx$ existiert und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

$$\int_0^a f'(x)dx = \left[f(x)\right]_0^a = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^a = \ln\left(a^2+1\right) - \ln(1) = \ln\left(a^2+1\right)$$

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a f'(x)dx = \lim_{a\to\infty} \ln\left(a^2+1\right) \to \infty \quad (\text{vgl. } 1.1)$$

Die Fläche, welche der Graph der Funktion $f'$ mit der x-Achse rechts vom Ursprung einschließt hat unendlichen Flächeninhalt.

2.0 Eine geradlinige Straße führt von einem Punkt A zu einem Punkt C. Vom Punkt C aus erreicht man auf kürzestem, aber unbefestigtem Weg eine Waldhütte im Punkt D. Für die Entfernungen gelten $\ell = \overline{AC}$ und $s = \overline{CD}$.




$s = \overline{CD}$

$\ell = \overline{AC}$

Ein Wanderer möchte in möglichst kurzer Zeit von A nach D gelangen. Zunächst wandert er ein Stück auf der Straße mit der konstanten Geschwindigkeit $v_1$. An einer Stelle B verlässt er dann die Straße und geht von dort auf geradlinigem Weg unter dem Winkel $\varepsilon$ zur ursprünglichen Wegrichtung quer durchs Gelände nach D, und zwar mit der konstanten Geschwindigkeit $v_2$. (Siehe Skizze)

5 2.1 Zeigen Sie, dass für die von der Stelle B und dem zugehörigen Winkel $\varepsilon$ abhängige Gesamtzeit $T(\varepsilon)$, die man für diesen Weg von A über B nach D benötigt, gilt:

$$T(\varepsilon) = \frac{\ell}{v_1} - \frac{s \cdot \cos\varepsilon}{v_1 \cdot \sin\varepsilon} + \frac{s}{v_2 \cdot \sin\varepsilon}$$

Es gilt: $T(\varepsilon) = t_{AB} + t_{BD} = \frac{\overline{AB}}{v_1} + \frac{\overline{BD}}{v_2}$

Außerdem gilt:

$$\sin(\varepsilon) = \frac{s}{\overline{BD}} \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} = \frac{s}{\sin(\varepsilon)}$$

$$\tan(\varepsilon) = \frac{s}{\ell - \overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \ell - \overline{AB} = \frac{s}{\tan(\varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \ell - \frac{s \cdot \cos(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)}$$

Beides nun eingesetzt:

$$T(\varepsilon) = \frac{\overline{AB}}{v_1} + \frac{\overline{BD}}{v_2} = \frac{\ell}{v_1} - \frac{s \cdot \cos(\varepsilon)}{v_1 \cdot \sin(\varepsilon)} + \frac{s}{v_2 \cdot \sin(\varepsilon)}$$

2.2 Zeigen Sie, dass für die Ableitungsfunktion von $T(\varepsilon)$ gilt:

$$\frac{dT}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{s}{v_1 \cdot v_2} \cdot \frac{v_2 - v_1 \cdot \cos\varepsilon}{(\sin\varepsilon)^2}$$

2.3.0 Die vorliegenden Wegstrecken bzw. Geschwindigkeiten betragen

$\ell = 7{,}1\ \text{km}, \quad s = 4{,}1\ \text{km}, \quad v_1 = 5{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $v_2 = 2{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2.3.1 Berechnen Sie jeweils, wie lange die Wanderung von A nach D dauern würde, wenn der Wanderer die Straße schon im Punkt A bzw. erst im Punkt C verlassen würde.

2.3.2 Bestimmen Sie zunächst, für welchen Winkel $\varepsilon_0$ die Zeit $T(\varepsilon)$ ihren absolut kleinsten

Wert annimmt, und berechnen Sie dann $T(\varepsilon_0)$.