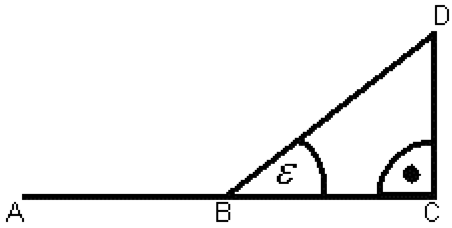
2007 A II Angabe

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \ln(x^2+1)$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
4	1.1	Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f sowie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $\lvert x \rvert \to \infty$.
3	1.2	Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und geben Sie ihre Wertemenge W_f an.
5	1.3	Ermitteln Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und geben Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von f an.
6	1.4	Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und geben Sie die Koordinaten seiner Wendepunkte an. [Teilergebnis: $f''(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$]
5	1.5	Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte der Ableitungsfunktion f' für $\lvert x \rvert \to \infty$ und geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f' an.
8	1.6	Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f' und geben Sie die Koordinaten seiner Wendepunkte an.
8	1.7	Zeichnen Sie unter Verwendung schon bekannter Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte die Graphen der Funktion f und der Ableitungsfunktion f' für $-5 \le x \le 5$ in ein gemeinsames kartesisches Koordinatensystem (Maßstab: 1 LE = 1 cm).
6	1.8	Die Graphen von f und f' schneiden sich an den Stellen x_1 und x_2, wobei $x_1 < x_2$. Bestimmen Sie x_2 mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Verwenden Sie als Startwert $x_0 = 1{,}3$ und führen Sie einen Näherungsschritt durch. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.
4	1.9	Berechnen Sie $\int_0^a f'(x)\,dx$ für eine positive reelle Zahl a, prüfen Sie, ob der Grenzwert $\lim\limits_{a \to \infty} \int_0^a f'(x)\,dx$ existiert und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

2.0 Eine geradlinige Straße führt von einem Punkt A zu einem Punkt C. Vom Punkt C aus erreicht man auf kürzestem, aber unbefestigtem Weg eine Waldhütte im Punkt D. Für die Entfernungen gelten $\ell = \overline{AC}$ und $s = \overline{CD}$.



$s = \overline{CD}$

$\ell = \overline{AC}$

Ein Wanderer möchte in möglichst kurzer Zeit von A nach D gelangen. Zunächst wandert er ein Stück auf der Straße mit der konstanten Geschwindigkeit v_1. An einer Stelle B verlässt er dann die Straße und geht von dort auf geradlinigem Weg unter dem Winkel ε zur ursprünglichen Wegrichtung quer durchs Gelände nach D, und zwar mit der konstanten Geschwindigkeit v_2. (Siehe Skizze)

5 2.1 Zeigen Sie, dass für die von der Stelle B und dem zugehörigen Winkel ε abhängige Gesamtzeit $T(\varepsilon)$, die man für diesen Weg von A über B nach D benötigt, gilt:

$$T(\varepsilon) = \frac{\ell}{v_1} - \frac{s \cdot \cos\varepsilon}{v_1 \cdot \sin\varepsilon} + \frac{s}{v_2 \cdot \sin\varepsilon}$$

4 2.2 Zeigen Sie, dass für die Ableitungsfunktion von $T(\varepsilon)$ gilt:

$$\frac{dT}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{s}{v_1 \cdot v_2} \cdot \frac{v_2 - v_1 \cdot \cos\varepsilon}{(\sin\varepsilon)^2}$$

2.3.0 Die vorliegenden Wegstrecken bzw. Geschwindigkeiten betragen

$\ell = 7{,}1$ km, $s = 4{,}1$ km, $v_1 = 5{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $v_2 = 2{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

4 2.3.1 Berechnen Sie jeweils, wie lange die Wanderung von A nach D dauern würde, wenn der Wanderer die Straße schon im Punkt A bzw. erst im Punkt C verlassen würde.

8 2.3.2 Bestimmen Sie zunächst, für welchen Winkel ε_0 die Zeit $T(\varepsilon)$ ihren absolut kleinsten Wert annimmt, und berechnen Sie dann $T(\varepsilon_0)$.

70