

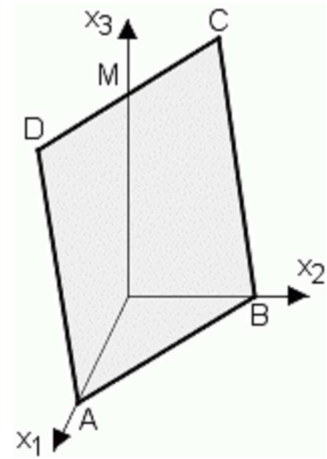
2006 B I Angabe

- BE 1.0 Das in der Skizze dargestellte Rechteck stellt eine Reklametafel dar. Der Mittelpunkt M der oberen Rechtecksseite liegt auf der x_3 -Achse.

Die Punkte A, B und M haben folgende Koordinaten:
 $A(30; 0; 0)$, $B(0; 30; 0)$ und $M(0; 0; 100)$.

Für die Einheiten auf den drei Koordinatenachsen gilt jeweils: 1 LE = 1 dm .

Auf die Verwendung der Einheiten kann, wenn nicht ausdrücklich verlangt, verzichtet werden.



- 4 1.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C und D.

$$\vec{OC} = \vec{OM} + \vec{MC} = \vec{OM} + \frac{1}{2} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0-30 \\ 30-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C(-15|15|100)$$

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OC} + \vec{BA} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ 100 \end{pmatrix} \Rightarrow D(15|-15|100)$$

- 4 1.2 Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Reklametafel und geben Sie den Flächeninhalt in m^2 auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-30)^2 + 30^2} = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}$$

$$|\vec{AD}| = \left| \begin{pmatrix} 15-30 \\ -15-0 \\ 100-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ 100 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-15)^2 + (-15)^2 + 100^2} = \sqrt{10450} = 5\sqrt{418}$$

Dann folgt für die gesuchte Rechtecksfläche:

$$A = 30\sqrt{2} \text{ dm} \cdot 5\sqrt{418} \text{ dm} = 4337,049\dots \text{dm}^2 \approx 43,37 \text{ m}^2$$

- 3 1.3 Die Reklametafel liegt in der Ebene E. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und in Koordinatenform.

[Mögliches Teilergebnis: $10x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 300 = 0$]

$$E: \vec{x} = \overline{OA} + \lambda \cdot \overline{AB} + \mu \cdot \overline{AD}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Normalenvektors:

$$\overline{AB} \times \overline{AD} = \begin{pmatrix} -30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \cdot 100 - 0 \cdot (-15) \\ 0 \cdot (-15) - (-30) \cdot 100 \\ -30 \cdot (-15) - 30 \cdot (-15) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 3000 \\ 900 \end{pmatrix} = 300 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Normalenform: $E: 10x_1 + 10x_2 + 3x_3 + c = 0$

Punkt A einsetzen liefert c: $10 \cdot 30 + 10 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -300$

$$E: 10x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 300 = 0$$

- 5 1.4 Mit einer senkrecht zur Ebene E verlaufenden Halterung wird die Reklametafel im Ursprung O befestigt. Berechnen Sie die Koordinaten des Befestigungspunkts S in der Ebene E und die Länge \overline{OS} der Halterung.

Hierzu bildet man zunächst eine Hilfsgerade h durch den Koordinatenursprung mit dem Richtungsvektor \vec{n}_E (diese Gerade steht dann nämlich senkrecht auf der Ebene E).

$$h: \vec{x} = \vec{0} + \kappa \cdot \vec{n}_E \Rightarrow h: \vec{x} = \kappa \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Den allgemeinen Geradenpunkt setzt man nun in die Normalenform der Ebene E ein:

$$10 \cdot 10\kappa + 10 \cdot 10\kappa + 3 \cdot 3\kappa - 300 = 0 \Rightarrow 209 \cdot \kappa = 300 \Rightarrow \kappa = \frac{300}{209}$$

$$\text{Nun erhält man den Vektor } \overline{OS} = \frac{300}{209} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für den Punkt S folgt: $S(14 \frac{74}{209} | 14 \frac{74}{209} | 4 \frac{64}{209})$

Für die Länge der Halterung folgt:

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{3000}{209} \\ \frac{3000}{209} \\ \frac{900}{209} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{3000}{209}\right)^2 + \left(\frac{3000}{209}\right)^2 + \left(\frac{900}{209}\right)^2} = 20,75...(\text{dm}) \Rightarrow \ell = 2,075 \text{ m}$$

2.0 Zur Beleuchtung der Reklametafel verwendet man eine Lichtquelle, die auf einer Führungsschiene verschoben werden kann. Dieser Strahler verläuft auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 120 \\ -30 \\ -200 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 195 \\ -105 \\ -509 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

6 2.1 Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E außerhalb der Reklametafel liegt.

Um den Schnittpunkt zu berechnen, setzt man g in E ein:

$$\begin{aligned} 10 \cdot (120 + 195\lambda) + 10 \cdot (-30 - 105\lambda) + 3 \cdot (-200 - 509\lambda) - 300 &= 0 \\ 1200 + 1950\lambda - 300 - 1050\lambda - 600 - 1527\lambda - 300 &= 0 \\ -627\lambda &= 0 \\ \lambda &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 120 \\ -30 \\ -200 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow P(120 | -30 | -200)$$

Die Eckpunkte A und B haben die x_3 -Koordinate 0 , daher liegen diese beiden Punkte in der $x_1 - x_2$ -Ebene. Die Eckpunkte C und D haben die x_3 -Koordinate 100 und liegen daher oberhalb der $x_1 - x_2$ -Ebene (vgl. Zeichnung in der Angabe!).

Der Schnittpunkt P hat allerdings die x_3 -Koordinate -200 . Daher liegt der Punkt P unterhalb der $x_1 - x_2$ -Ebene und somit nicht im Rechteck $ABCD$.

3 2.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Menge aller Punkte, die von den vier Ecken der Reklametafel gleich weit entfernt sind.

Die Menge aller Punkte, die von den vier Eckpunkten gleich weit entfernt sind bilden eine Gerade s welche senkrecht auf der Rechtecksebene steht und durch den Mittelpunkt Z des Rechtecks verläuft.

Der Mittelpunkt Z ist Mittelpunkt der Strecke AC , somit folgt:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 100 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 7,5 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Für die Gerade s folgt dann:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 7,5 \\ 50 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 5 2.3 Zeigen Sie, dass auch ein Punkt L der Geraden g zu der in 2.2 ermittelten Menge gehört, und berechnen Sie seinen Abstand von einem der vier Eckpunkte A, B, C oder D.

Dazu schneidet man die Gerade s mit der Geraden g:

$$\begin{pmatrix} 7,5 \\ 7,5 \\ 50 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ -30 \\ -200 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 195 \\ -105 \\ -509 \end{pmatrix}$$

$$7,5 + 10\eta = 120 + 195\lambda \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \Rightarrow 7,5 + 10\eta = 120 - \frac{1}{2} \cdot 195 \Rightarrow \eta = 1,5$$

$$7,5 + 10\eta = -30 - 105\lambda$$

$$50 + 3\eta = -200 - 509\lambda$$

$$0 = 150 + 300\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Jetzt noch λ und η in die dritte Gleichung eingesetzt:

$$50 + 3 \cdot 1,5 = -200 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 509 \Rightarrow 54,5 = 54,5 \quad (\text{w})$$

Somit schneiden sich die beiden Geraden. Den Schnittpunkt L erhält mit $\eta = 1,5$ in s:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 7,5 \\ 50 \end{pmatrix} + 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,5 \\ 22,5 \\ 54,5 \end{pmatrix} = \overline{OL} \Rightarrow L(22,5|22,5|54,5)$$

Für den Abstand d vom Eckpunkt A gilt dann:

$$|\overline{AL}| = \left| \begin{pmatrix} 22,5 - 30 \\ 22,5 - 0 \\ 54,5 - 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -7,5 \\ 22,5 \\ 54,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-7,5)^2 + 22,5^2 + 54,5^2} = 59,436...(\text{dm})$$

$$\Rightarrow d = 5,944 \text{ m}$$