2006 A II Lösung

BE 1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a:\ x \mapsto \dfrac{a-x^2}{x^2-1}$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a>0$ in der maximalen Definitionsmenge D_f.

5 1.1 Geben Sie D_f an und ermitteln Sie die Art der Definitionslücken in Abhängigkeit von a.

$n(x)=x^2-1=0 \ \Rightarrow\ x_{1/2}=\pm 1 \ \Rightarrow\ \mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

$z(\pm 1)=a-(\pm 1)^2=a-1=0 \ \Rightarrow\ a=1$

1. Fall: $a=1;\ f_1(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-1}=\dfrac{-(x^2-1)}{x^2-1}=-1;$ f ist stetig fortsetzbar

2. Fall: $a\neq 1;\ f_a(x)=\dfrac{a-x^2}{(x-1)(x+1)};$ $x_1=1$ und $x_2=-1$ sind je Pole erster Ordnung

6 1.2 Berechnen Sie die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a und untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Symmetrie.

$z(x)=a-x^2=0 \ \Rightarrow\ x^2=a \ \Rightarrow\ x_{1/2}=\pm\sqrt{a}$

$f_a(-x)=\dfrac{a-(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{a-x^2}{x^2-1}=f_a(x) \ \Rightarrow\ G_a$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

1.3.0 Für $a=4$ erhält man die Funktion $f_4:\ x \mapsto \dfrac{4-x^2}{x^2-1}$ in der Definitionsmenge D_f.

6 1.3.1 Geben Sie mit Begründung Art und Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_4 an.

Da für $a=4>1$ $x_1=1$ und $x_2=-1$ je Pole erster Ordnung sind folgt:
G_4 hat zwei senkrechte Asymptoten mit den Gleichungen: $x_1=1$ und $x_2=-1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_4(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overbrace{4-x^2}^{\to-\infty}}{\underbrace{x^2-1}_{\to\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{2x}=\lim_{x\to\pm\infty}-1=-1$$

Somit hat der Graph G_4 eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y=-1$

5 1.3.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten des Extremalpunktes des Graphen von f_4.

[Teilergebnis: $f_4{}'(x) = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}$]

$$f_4(x) = \frac{4-x^2}{x^2-1}$$

$$f_4{}'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot(-2x)-(4-x^2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^3+2x-8x+2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-6x}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

$$f_4{}''(x) = \frac{(x^2-1)^2\cdot(-6)-(-6x)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1)(-6\cdot(x^2-1)+6x\cdot 4x)}{(x^2-1)^4}$$

$$f_4{}''(x) = \frac{-6x^2+6+24x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{18x^2+6}{(x^2-1)^3} = \frac{6\cdot(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_4{}''(0) = -6 < 0 \quad \text{rk} \\ f_4(0) = -4 \end{array}\right\} HP(0|-4)$$

8 1.3.3 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f_4 und überprüfen Sie die Existenz von Wendepunkten.

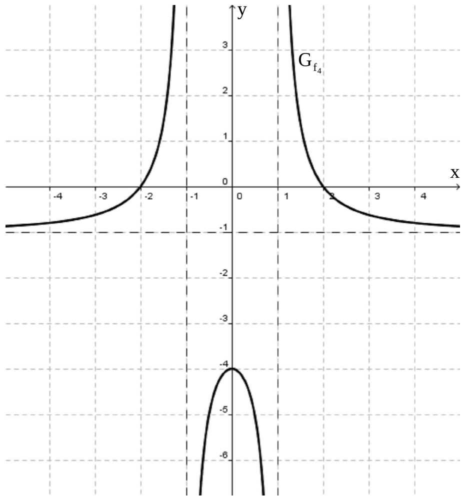
$$f_4{}''(x) = \frac{6\cdot(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} = 0 \quad\Rightarrow\quad 3x^2+1=0 \quad\Rightarrow\quad x^2 = -\tfrac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad x_{1/2} = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{3}} \notin \mathbb{R}$$

		-1		1	x
$6\cdot(3x^2+1)$	+		+		+
$(x^2-1)^3$	+		−		+
$f_4{}''(x)$	+		−		+
G_{f_4}	lk		rk		lk

G_{f_4} ist linksgekrümmt für $x \in]-\infty;-1[$ und für $x \in]1;\infty[$

G_{f_4} ist rechtsgekrümmt für $x \in]-1;1[$

7 1.3.4 Zeichnen Sie unter Verwendung schon bekannter Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graph der Funktion f_4 zusammen mit seinen Asymptoten im Intervall $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab: 1 LE = 1 cm)



6 1.3.5 Gegeben ist die Funktion F in ihrer maximalen Definitionsmenge D_F:

$F:\ x \mapsto -x + \frac{3}{2}\ln(x-1) - \frac{3}{2}\ln(x+1)$. Ermitteln Sie D_F und zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion der auf diesen Bereich D_F eingeschränkten Funktion f_4 ist.

Es muss gelten: $x-1>0 \quad \Rightarrow \quad x>1$ und $x+1>0 \quad \Rightarrow \quad x>-1$

Insgesamt folgt: $\mathbb{D}_F = \left]1;\infty\right[$

$$F(x) = -x + \frac{3}{2}\ln(x-1) - \frac{3}{2}\ln(x+1)$$

$$F'(x) = -1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$F'(x) = -1 + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$F'(x) = -1 + \frac{3}{x^2-1}$$

$$F'(x) = \frac{-x^2+1+3}{x^2-1}$$

$$F'(x) = \frac{4-x^2}{x^2-1}$$

$$F'(x) = f_4(x)$$

$\Rightarrow$ $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f_4(x)$

5 1.3.6 Der Graph von f_4, die positive x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ schließen ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück im Diagramm von Aufgabe 1.3.4 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhaltes ohne Rundung des Ergebnisses.

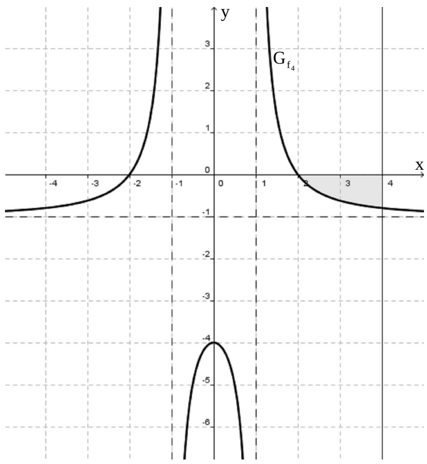
$$A = -\int_2^4 f_4(x)\,dx$$

$$A = -\left[-x + \tfrac{3}{2}\ln(x-1) - \tfrac{3}{2}\ln(x+1)\right]_2^4$$

$$A = -\left[-4 + \tfrac{3}{2}\ln(3) - \tfrac{3}{2}\ln(5) - \left(-2 + \tfrac{3}{2}\ln(1) - \tfrac{3}{2}\ln(3)\right)\right]$$

$$A = -\left[-4 + \tfrac{3}{2}\ln(3) - \tfrac{3}{2}\ln(5) + 2 + \tfrac{3}{2}\ln(3)\right]$$

$$A = 2 - 3\ln(3) + \tfrac{3}{2}\ln(5)$$



2.0 Gegeben ist die reelle Funktion $g:\ x \mapsto x - 4 - \sin x$ in der Definitionsmenge $D_g = \left]0; 2\pi\right[$.

4 2.1 Zeigen Sie mit Hilfe des Monotonieverhaltens, dass die Funktion g in ihrer Definitionsmenge genau eine Nullstelle besitzt.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = -4 < 0 \\ \lim\limits_{x\to 2\pi} g(x) = g(2\pi) = 2\pi - 4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow G_g \text{ hat in } \mathbb{D}_g \text{ mindestens eine Nullstelle}$$

$$g'(x) = 1 - \cos(x) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad G_g \text{ ist sms in } \mathbb{D}_g$$

Insgesamt folgt: Die Funktion g hat in $\mathbb{D}_g$ genau eine Nullstelle

4 2.2 Berechnen Sie diese Nullstelle ausgehend vom Startwert $x_1 = 3$ mit dem Newton-Verfahren. Führen Sie zwei Näherungsschritte durch und geben Sie die für die Berechnung notwendigen Teilergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.

$$g(x) = x - 4 - \sin(x)$$
$$g'(x) = 1 - \cos(x)$$

n	x_n	$g(x_n)$	$g'(x_n)$
1	3	-1,141	1,990
2	3,573	-0,009	1,908
3	3,578		

3.0 Gegeben ist die reelle Funktion $G: t \mapsto G_0 \cdot e^{kt}$
mit $t \in \mathbb{R} \wedge t > 0$, $G_0 \in \mathbb{R} \wedge G_0 > 0$ und $k \in \mathbb{R}$.
$G(t)$ beschreibt die exponentielle Zunahme bzw. Abnahme einer Anfangsmenge G_0 in Abhängigkeit von der Zeit t.

3 3.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion G einen Wachstums- bzw. einen Abnahmeprozess beschreibt.

$$G(t) = G_0 \cdot e^{kt} \quad \Rightarrow \quad \dot{G}(t) = k \cdot \underbrace{G_0 \cdot e^{kt}}_{>0}$$

$\Rightarrow \dot{G}(t) > 0$ für $k > 0$ (Wachstumsprozess)

$\Rightarrow \dot{G}(t) < 0$ für $k < 0$ (Abnahmeprozess)

3.2.0 $G(t)$ bezeichnet im Folgenden für $t \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Geburten eines bestimmten Kalenderjahres in Deutschland. Im Jahr 2003 wurden $709{,}4 \cdot 10^3$ Geburten registriert. Aus den vorangegangenen Jahren ergibt sich für k der auch für die fraglichen Zeiträume der folgenden Teilaufgaben als konstant angenommene Wert $k = -0{,}01213$.

2 3.2.1 Erstellen Sie eine Prognose für die Anzahl der Geburten in Deutschland im Jahr 2020.

Jahr 2020 $\Rightarrow$ $t = 17$

$$G(17) = 709{,}4 \cdot 10^3 \cdot e^{-0{,}01213 \cdot 17} = 577{,}2 \cdot 10^3$$

Im Jahr 2020 kann mit $577{,}2 \cdot 10^3$ Geburten gerechnet werden.

5 3.2.2 Berechnen Sie, in welchem Kalenderjahr die Anzahl der Geburten in Deutschland erstmals den Wert $650{,}0 \cdot 10^3$ unterschreiten wird.

$$\begin{aligned} G(t) &< 650 \cdot 10^3 \\ 709{,}4 \cdot 10^3 \cdot e^{-0{,}01213 \cdot t} &< 650 \cdot 10^3 \\ e^{-0{,}01213 \cdot t} &< \tfrac{650}{709{,}4} \\ -0{,}01213 \cdot t &< \ln\left(\tfrac{650}{709{,}4}\right) \\ t &> \frac{\ln\left(\frac{650}{709{,}4}\right)}{-0{,}01213} \approx 7{,}21 \end{aligned}$$

Somit: $t \geq 8$

Im Jahr 2011 wird die Anzahl der Geburten den Wert $650{,}0 \cdot 10^3$ unterschreiten.

4 | 3.2.3 Ermitteln Sie für das oben angegebene k die prozentuale jährliche Abnahme der Anzahl der Geburten in Deutschland.

$$p = \frac{G(t+1)-G(t)}{G(t)} = \frac{G_0 \cdot e^{k\cdot(t+1)} - G_0 \cdot e^{k\cdot t}}{G_0 \cdot e^{k\cdot t}} = \frac{G_0 \cdot \left(e^{k\cdot t} \cdot e^{k} - e^{k\cdot t}\right)}{G_0 \cdot e^{k\cdot t}}$$

$$p = \frac{e^{k\cdot t} \cdot \left(e^{k} - 1\right)}{e^{k\cdot t}} = e^{k} - 1 = e^{-0,01213} - 1 \approx -0,012 = -1,2\%$$

Die jährliche Abnahme beträgt ca. 1,2%.

70