2006 A II Angabe

BE 1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{a-x^2}{x^2-1}$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ in der maximalen Definitionsmenge D_f.

5 1.1 Geben Sie D_f an und ermitteln Sie die Art der Definitionslücken in Abhängigkeit von a.

6 1.2 Berechnen Sie die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a und untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Symmetrie.

1.3.0 Für $a = 4$ erhält man die Funktion $f_4 : x \mapsto \frac{4-x^2}{x^2-1}$ in der Definitionsmenge D_f.

6 1.3.1 Geben Sie mit Begründung Art und Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_4 an.

5 1.3.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten des Extremalpunktes des Graphen von f_4.

$$\left[\text{Teilergebnis}: f_4'(x) = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}\right]$$

8 1.3.3 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f_4 und überprüfen Sie die Existenz von Wendepunkten.

7 1.3.4 Zeichnen Sie unter Verwendung schon bekannter Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graph der Funktion f_4 zusammen mit seinen Asymptoten im Intervall $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab: 1 LE = 1 cm)

6 1.3.5 Gegeben ist die Funktion F in ihrer maximalen Definitionsmenge D_F:

$F : x \mapsto -x + \frac{3}{2}\ln(x-1) - \frac{3}{2}\ln(x+1)$. Ermitteln Sie D_F und zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion der auf diesen Bereich D_F eingeschränkten Funktion f_4 ist.

5 1.3.6 Der Graph von f_4, die positive x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ schließen ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück im Diagramm von Aufgabe 1.3.4 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhaltes ohne Rundung des Ergebnisses.

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion $g: x \mapsto x - 4 - \sin x$
in der Definitionsmenge $D_g =]0; 2\pi[$.

4 2.1 Zeigen Sie mit Hilfe des Monotonieverhaltens, dass die Funktion g in ihrer Definitionsmenge genau eine Nullstelle besitzt.

4 2.2 Berechnen Sie diese Nullstelle ausgehend vom Startwert $x_1 = 3$ mit dem Newton-Verfahren. Führen Sie zwei Näherungsschritte durch und geben Sie die für die Berechnung notwendigen Teilergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.

3.0 Gegeben ist die reelle Funktion $G: t \mapsto G_0 \cdot e^{kt}$
mit $t \in \mathbb{R} \wedge t > 0$, $G_0 \in \mathbb{R} \wedge G_0 > 0$ und $k \in \mathbb{R}$.
G(t) beschreibt die exponentielle Zunahme bzw. Abnahme einer Anfangsmenge G_0 in Abhängigkeit von der Zeit t.

3 3.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion G einen Wachstums- bzw. einen Abnahmeprozess beschreibt.

3.2.0 G(t) bezeichnet im Folgenden für $t \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Geburten eines bestimmten Kalenderjahres in Deutschland. Im Jahr 2003 wurden $709{,}4 \cdot 10^3$ Geburten registriert. Aus den vorangegangenen Jahren ergibt sich für k der auch für die fraglichen Zeiträume der folgenden Teilaufgaben als konstant angenommene Wert $k = -0{,}01213$.

2 3.2.1 Erstellen Sie eine Prognose für die Anzahl der Geburten in Deutschland im Jahr 2020.

5 3.2.2 Berechnen Sie, in welchem Kalenderjahr die Anzahl der Geburten in Deutschland erstmals den Wert $650{,}0 \cdot 10^3$ unterschreiten wird.

4 3.2.3 Ermitteln Sie für das oben angegebene k die prozentuale jährliche Abnahme der Anzahl der Geburten in Deutschland.

70