

## 2005 B II Lösung

BE 1.0 Im dreidimensionalen Vektorraum  $V^3$  sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c}_k = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } k \in \mathbb{R}.$$

3 1.1 Berechnen Sie, für welche Werte des Parameters  $k$  die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}_k$  keine Basis des dreidimensionalen Vektorraumes  $V^3$  bilden.

Damit die drei Vektoren keine Basis bilden muss gelten:  $\text{Det}(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}_k) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 2k - 12 = -2k = 0 \Rightarrow k = 0$$

Für  $k = 0$  bilden die drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}_0$  keine Basis des Vektorraumes  $V^3$ .

3 1.2 Setzen Sie  $k = 0$  und überprüfen Sie, ob sich der Vektor  $\vec{d}$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}_0$  darstellen lässt.

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} 3\lambda + 3\mu & = & 6 \\ 2\mu + 2\eta & = & -2 \\ \lambda + 2\mu + \eta & = & 1 \end{array} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \phantom{=} \\ \phantom{=} \end{array} \right\} - \\ \phantom{=} \cdot 3 \leftarrow \end{array} \right\} -$$


---


$$\begin{array}{rcl} -3\mu - 3\eta & = & 3 \\ 2\mu + 2\eta & = & -2 \end{array} \begin{array}{l} \phantom{=} \cdot 2 \leftarrow \\ \phantom{=} \cdot 3 \leftarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} \phantom{=} \\ \phantom{=} \end{array} \right\} +$$


---


$$0 = 0 \quad (w)$$

Das Gleichungssystem führt zu einer wahren Aussage. Somit besitzt es unendlich viele Lösungen und somit gibt es auch unendliche viele Möglichkeiten den Vektor  $\vec{d}$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}_0$  darzustellen.

- 2 1.3 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die den Punkt P (1; -1; 1) enthält und von den Richtungsvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  bestimmt wird, in Koordinatenform.  
 [ Mögliches Ergebnis:  $E : 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 7 = 0$  ]

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{n}_E \Rightarrow E: \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$E: -2(x_1 - 1) - 3(x_2 + 1) + 6(x_3 - 1) = 0$$

$$E: -2x_1 + 2 - 3x_2 - 3 + 6x_3 - 6 = 0$$

$$E: -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 7 = 0$$

- 5 1.4 Die Ebene E schneidet die drei Koordinatenachsen in den Punkten  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$ . Berechnen Sie das Volumen der Pyramide mit dem Dreieck  $X_1X_2X_3$  als Grundfläche und dem Koordinatenursprung als Spitze.

Schnittpunkt mit der  $x_1$ -Achse:  $x_2 = x_3 = 0$

$$-2x_1 - 7 = 0 \Rightarrow x_1 = -3,5 \Rightarrow X_1(-3,5|0|0)$$

Schnittpunkt mit der  $x_2$ -Achse:  $x_1 = x_3 = 0$

$$E: -3x_2 - 7 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{7}{3} \Rightarrow X_2(0|-\frac{7}{3}|0)$$

Schnittpunkt mit der  $x_3$ -Achse:  $x_1 = x_2 = 0$

$$E: 6x_3 - 7 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{7}{6} \Rightarrow X_3(0|0|\frac{7}{6})$$

Für das Volumen einer dreiseitigen Pyramide gilt:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| (\overline{OX_1} \times \overline{OX_2}) \circ \overline{OX_3} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \det(\overline{OX_1}, \overline{OX_2}, \overline{OX_3}) \right|$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -3,5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (-3,5) \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \frac{7}{6} = \frac{343}{216} \approx 1,588$$

2.0 Gegeben ist nun zusätzlich die Gerade h:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$

- 5 2.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden h mit der Ebene E aus Teilaufgabe 1.3 sowie den Schnittwinkel zwischen h und E.

[ Teilergebnis: S (1; -1; 1) ]

Man setzt zunächst h in E ein:

$$\begin{aligned} -2(21+10\lambda) - 3(7+4\lambda) + 6(-21-11\lambda) - 7 &= 0 \\ -42 - 20\lambda - 21 - 12\lambda - 126 - 66\lambda - 7 &= 0 \\ -98\lambda &= 196 \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S(1|-1|1)$$

Um den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E zu ermitteln benötigt man zuerst den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und dem Normalenvektor der Ebene E.

$$\cos \rho = \frac{\left| \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|-20 - 12 - 66|}{\sqrt{100+16+121} \cdot \sqrt{4+9+36}} = \frac{|-98|}{\sqrt{237} \cdot \sqrt{49}} = \frac{98}{7 \cdot \sqrt{237}}$$

$$\Rightarrow \rho = 24,58^\circ$$

Dann folgt für den Schnittwinkel  $\alpha$  zwischen der Geraden g und der Ebene E:

$$\alpha = 90^\circ - 24,58^\circ = 65,42^\circ$$

7 2.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden  $h^*$ , die durch Spiegelung der Geraden  $h$  an der Ebene  $E$  entsteht.

Der Stützvektor  $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix}$  der Geraden  $h$  liefert

den Punkt  $P(21|7|-21)$  auf der Geraden  $h$ . Dieser liegt nicht auf der Ebenen  $E$  (da ja  $S$  der Schnittpunkt der Geraden  $h$  mit der Ebene  $E$  ist).

Nun bildet man die Lotgerade  $\ell$  (mit dem Richtungsvektor  $\vec{n}_E$ ) und dem Punkt  $P$  (Stützvektor  $\overrightarrow{OP}$ ).

$$\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nun schneidet man die Lotgerade  $\ell$  mit der Ebene  $E$ :

$$\begin{aligned} -2(21 - 2\tau) - 3(7 - 3\tau) + 6(-21 + 6\tau) - 7 &= 0 \\ -42 + 4\tau - 21 + 9\tau - 126 + 36\tau - 7 &= 0 \\ 49\tau &= 196 \\ \tau &= 4 \end{aligned}$$

Man erhält nun den Punkt  $L$ :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow L(13|-5|3)$$

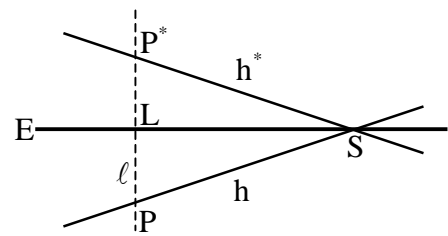
Für den Vektor  $\overrightarrow{OP}^*$  folgt dann:

$$\overrightarrow{OP}^* = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left( \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -17 \\ 27 \end{pmatrix} \Rightarrow P^*(5|-17|27)$$

Der Richtungsvektor der Geraden  $h^*$  ist durch die Punkte  $P^*$  und  $S$  festgelegt:

$$\vec{u}_{h^*} = \overrightarrow{SP}^* = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -17+1 \\ 27-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ 26 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$h^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} \quad (\text{mit dem Punkt } S \text{ als „Aufpunkt“})$$



- 5 | 2.3 Bestimmen Sie je eine Gleichung für die beiden winkelhalbierenden Geraden  $w_1$  und  $w_2$  der Geraden  $h$  und  $h^*$ .

Die Winkelhalbierende  $w_1$  ist durch die Punkte S und L festgelegt (siehe Skizze bei 2.2).

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1-13 \\ -1+5 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{v} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow w_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die zweite Winkelhalbierende  $w_2$  ist durch den Punkt S und den Normalenvektor  $\vec{n}_E$  der Ebene E bestimmt.

$$w_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$