2005 A II Angabe

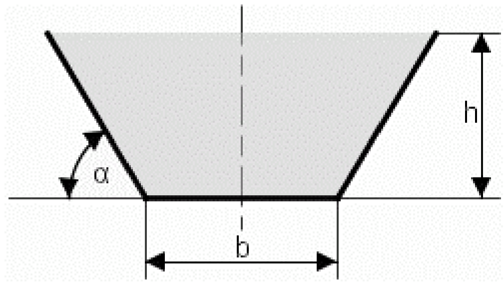
BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto 10 \cdot \frac{\ln x}{x^2}$ in der maximalen Definitionsmenge D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
7	1.1	Geben Sie D_f an, berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f und bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) an den Rändern der Definitionsmenge.
9	1.2	Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f, bestimmen Sie damit die Art des relativen Extremalpunktes und berechnen Sie seine Koordinaten. [Teilergebnis : $f'(x) = 10 \cdot \frac{1-2\ln x}{x^3}$]
6	1.3	Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ und zeigen Sie ohne Berechnung der zweiten Ableitung, dass G_f einen Wendepunkt besitzt, dessen x-Koordinate größer als die x-Koordinate des Extremalpunktes ist.
6	1.4	Zeichnen Sie mit Hilfe der Funktionswerte für $x = 0{,}8$, x = 4 und $x = 6$ und unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graph von f für $0 < x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.
	1.5.0	Gegeben ist ferner die Menge der Geraden g_m mit den Funktionsgleichungen $y = mx - m$, wobei m ein reeller Parameter ist.
5	1.5.1	Zeigen Sie, dass jede Gerade g_m den Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse enthält. Bestimmen Sie, für welche reellen Werte von m die entsprechende Gerade g_m einen weiteren Punkt S_m des ersten Quadranten mit G_f gemeinsam hat.
7	1.5.2	Setzen Sie nun m = 0,25. Die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}25x - 0{,}25$ schneidet G_f in den Punkten $N(1; 0)$ und $S_{0,25}$ und schließt mit G_f ein Flächenstück ein. Zeichnen Sie die Gerade in das Koordinatensystem aus 1.4 ein und schraffieren Sie dieses Flächenstück. Bestimmen Sie Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes $S_{0,25}$. Verwenden Sie dazu für dessen Abszisse das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_1 = 4$ und führen Sie <u>einen</u> Näherungsschritt durch. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen.

8 1.6 Zeigen Sie, dass die Funktion $F_C : x \mapsto -10 \cdot \frac{1+\ln x}{x} + C$ mit $D_{F_C} = D_f$ und $C \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von F_C auf Grund der bisherigen Ergebnisse und ermitteln Sie daraus den x-Wert seines Wendepunkts.

5 1.7 Berechnen Sie nun angenähert die Flächenmaßzahl des in 1.5.2 schraffierten Flächenstücks. Runden Sie Ihr Ergebnis auf 2 Nachkommastellen.
(Hinweis: Falls Sie die obere Integrationsgrenze in 1.5.2 nicht berechnen konnten, verwenden Sie dafür den Wert 4,22.)

2.0 Eine Rinne soll aus drei gleichen Brettern bestehen, und ihr Querschnitt die symmetrische Form wie in der Skizze haben. Die vorgegebene Breite jedes dieser Bretter wird mit b bezeichnet, h ist die Höhe dieser Rinne und α der Winkel, den die seitlich angebrachten Bretter mit der Waagrechten einschließen.
Die von α abhängige Querschnittsfläche der Rinne wird mit $A(\alpha)$ bezeichnet.
Dabei wird die Brettstärke vernachlässigt, und es gilt $0° < \alpha < 90°$.



8 2.1 Bestimmen Sie $A(\alpha)$ und zeigen Sie, dass gilt: $\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = b^2 \cdot \left[2 \cdot (\cos\alpha)^2 + \cos\alpha - 1\right]$.

9 2.2 Ermitteln Sie unter Verwendung der Substitution $u = \cos\alpha$ den Winkel α, für den der Querschnitt und damit das Fassungsvermögen der Rinne möglichst groß werden.

70