2005 A I Angabe

BE

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto (x^2+1) \cdot e^{-x+1}$ in der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

5 1.1 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$.

10 1.2 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f keine relativen Extremalpunkte, jedoch einen Terrassenpunkt und einen weiteren Wendepunkt aufweist. Bestimmen Sie auch die Koordinaten dieser Punkte.

[mögliches Teilergebnis: $f'(x) = (-x^2+2x-1) \cdot e^{-x+1}$]

6 1.3 Zeichnen Sie unter Verwendung schon bekannter Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graph der Funktion f für $-0,5 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

1.4.0 Gegeben ist die Funktion $F: x \mapsto f'(x) - \dfrac{4x+2}{e^{x-1}}$ in der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$.

5 1.4.1 Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.

4 1.4.2 Der Graph der Funktion f begrenzt zusammen mit den Koordinatenachsen und der Geraden x = 1 ein Flächenstück. Berechnen Sie ohne Rundung die Maßzahl seines Flächeninhaltes.

1.5.0 Zusätzlich ist nun die Funktion g mit den reellen Parametern a und b gegeben:
$g: x \mapsto a \cdot \sin(bx)$ in der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

5 1.5.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b so, dass der Graph von g durch den Punkt $T(1; 2)$ verläuft und die kleinste positive Nullstelle bei x = 2 liegt.

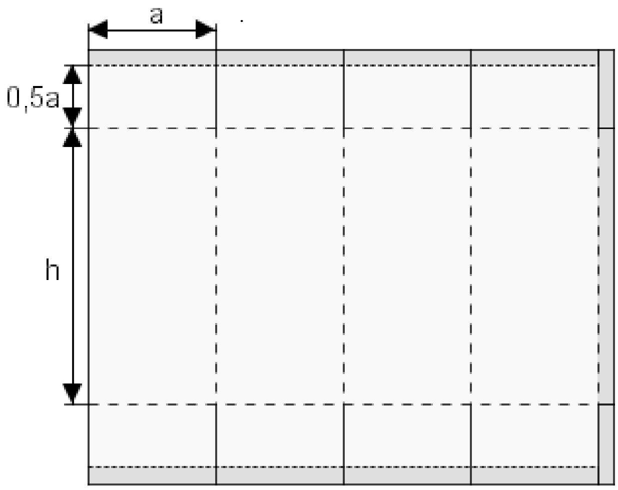
[Ergebnis: a = 2; $b = \dfrac{\pi}{2}$]

4 1.5.2 Zeigen Sie, dass die Graphen von f und g im Punkt T(1; 2) eine gemeinsame Tangente besitzen.

2 1.5.3 Zeichnen Sie für $0 \le x \le 2$ den Graph von g in das Koordinatensystem von 1.3 ein.

7 1.5.4 Der Graph von g teilt das in 1.4.2 betrachtete Flächenstück in zwei Teile. Entscheiden Sie durch geeignete Berechnungen, welcher der beiden Teile den größeren Flächeninhalt besitzt. Schraffieren Sie sodann das größere Teilstück.

2.0 Häufig werden Getränke in quaderförmige Behälter abgefüllt, deren Grundfläche ein Quadrat mit Seitenlänge a ist, und deren Höhe mit h bezeichnet wird. Ein solcher Behälter wird aus einem rechteckigen Stück Karton, wie es nebenstehend skizziert ist, hergestellt.
Zunächst wird dazu ein an beiden Enden offener Quader gefaltet. Dann werden aus den überstehenden Stücken der
Boden und das Oberteil gefalzt. Aus Stabilitätsgründen werden durch den grau dargestellten Streifen der Breite 1,0 cm Überlappungen erzeugt.



Es soll ein Behälter mit dem Volumen $V = 1000\ \text{cm}^3$ hergestellt werden, für den der Materialverbrauch, d.h. der Flächeninhalt des skizzierten Kartons, minimal ist.
Die Größen a und h sollen dabei die Einheit cm haben; bei den folgenden Berechnungen soll auf die Mitführung der Einheiten jedoch verzichtet werden.

6 2.1 Zeigen Sie, dass für den in Abhängigkeit von a dargestellten Flächeninhalt F(a) des skizzierten Kartons gilt: $F(a) = 4a^2 + 9a + 2 + \frac{4000}{a} + \frac{1000}{a^2}$; $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$.

4 2.2 Zeigen Sie, dass der Ansatz $\frac{dF(a)}{da} = 0$ zu folgender Gleichung führt:

$$8a^4 + 9a^3 - 4000a - 2000 = 0 .$$

5 2.3 Berechnen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens einen Näherungswert für eine Lösung der Gleichung aus 2.2.
Verwenden Sie als Startwert $a_1 = 7$, führen Sie zwei Schritte des Näherungsverfahrens durch und runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

7 2.4 Zeigen Sie unter der Annahme, dass es keine weitere positive Lösung dieser Gleichung gibt (Nachweis nicht erforderlich), dass für den in 2.3 berechneten Wert für a der Flächeninhalt F(a) seinen absoluten kleinsten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Höhe h des Behälters sowie die Abmessungen des skizzierten Kartons.

70