Musterlösung der Abschlussprüfung 2004 BII (Technik)

1.1 $E_0: \quad x_2 - x_3 = 0 \quad$ Wähle $x_3 = \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow x_2 = \lambda$

$E_1: \quad x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 + \lambda - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 2$

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2 $E_k \parallel g_k \Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \perp g_k \Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \cdot \begin{pmatrix} k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Also muss gelten:

$$\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} = k^2 + k - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; k_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

1.3

$$F: \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{n}_F$$

$$F: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x_1 - x_2 = 0$$

Die Ebene F enthält die x_3 – Achse.

1.4

$$\left| \frac{\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{k^2+2} \cdot \sqrt{1+1}} \right| = \left| \frac{k-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2+2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$$

$$\frac{k-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2+2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{k^2 - 2k + 1}{k^2 + 2} = 1$$

$$k^2 - 2k + 1 = k^2 + 2$$

$$-2k = 1$$

$$k = -\tfrac{1}{2}$$

1.5 $\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow \text{HNF von } F: \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 - x_2\right) = 0$

$d(F;s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2-\lambda) = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \mp 2 = \begin{cases}0\\4\end{cases}$

$A(2|0|0)$ und $B(2|4|4)$

1.6 Der Punkt $A(2|0|0)$ hat von der Ebene F den Abstand $\sqrt{2}$ (siehe1.5). Man benötigt nun einen Spiegelpunkt A', der spiegelbildlich zu A bezüglich der Ebene F liegt. Dieser Punkt A' liegt allgemein auf der Geraden

$k: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \eta\vec{n}_F = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. Diesen Punkt setzt man in seiner allgemeinen Form in die HNF von F ein:

$\frac{1}{\sqrt{2}}(2+\mu+\mu) = \pm\sqrt{2}$

$2 + 2\mu = \pm 2$

$\mu = \pm 1 - 1$

$\mu_{1/2} = \begin{cases}0\\-2\end{cases}$

$\mu_1 = 0$ liefert den schon bekannten Punkt $A(2|0|0)$

$\mu_2 = -2$ liefert den Punkt $A'(0|2|0)$ der spiegelbildlich zu A bezüglich der Ebenen F liegt.

Man benötigt nun noch den Schnittpunkt S der Ebene F mit der Geraden s. Dazu setzt man s in F ein:

$2\lambda = 0$

$\lambda = 2$

$\Rightarrow S(2|2|2)$

Die gesucht Gerade h verläuft durch die Punkte S und A'

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \bar{\sigma}\begin{pmatrix}0-2\\2-2\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

2.1 Damit die drei Vektoren keine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, muss der Rang der Matrix kleiner als 3 sein.

Also $t^2 - t = 0 \;\Leftrightarrow\; t_1 = 0 \vee t_2 = 1$

Da aber $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ folgt:

Für $t = 1$ bilden die drei Vektoren keine Basis des $\mathbb{R}^3$

$+ \; +$

$$\begin{array}{ccc|l}
1 & 1 & 1 & \cdot t \\
0 & t-1 & 1+t^2 & - \\
t & 1 & -1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & \\
0 & t-1 & 1+t^2 & - \\
0 & t-1 & t+1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & \\
0 & t-1 & 1+t^2 & \\
0 & 0 & t^2-t &
\end{array}$$

$+ \; + \; +$

2.2 Führt man mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ die entsprechenden Umformungen durch wie in 2.1, so erhält man für $t = -1$ die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix: $+$

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Rightarrow \lambda = -2 \\
\Rightarrow \mu = 1 \\
\Rightarrow \tau = 1
\end{array}$$

$+ \; +$

$+$