Musterlösung der Abschlussprüfung 2004 AII (Technik)

1.1 $f(x)=2\cdot(\ln x)^2-\ln(x^2)=2\cdot(\ln x)^2-2\ln x=2\ln x(\ln x-1)$

$f(x)=2\ln x(\ln x-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\ln x=0 \ \Rightarrow x_1=1\\ \ln x-1=0 \ \Rightarrow \ \ln x=1 \ \Rightarrow x_2=e\end{cases}$

1.2 $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\underbrace{\underbrace{2\ln x}_{-\infty}(\underbrace{\ln x}_{-\infty}-1)}_{-\infty}\to\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{2\ln x}_{\to\infty}\underbrace{(\underbrace{\ln x}_{\to\infty}-1)}_{\to\infty}\to\infty$

1.3 $f'(x)=2\cdot\frac{1}{x}(\ln x-1)+2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x}(2\ln x-1)=0$

$\Rightarrow 2\ln x-1=0 \ \Rightarrow \ln x=\frac{1}{2} \ \Rightarrow x=\sqrt{e}$

G_f ist smf für $x\in\left]0;\sqrt{e}\right]$

G_f ist sms für $x\in\left[\sqrt{e};\infty\right[$

	0 … $\sqrt{e}$	$\sqrt{e}$ … x
$\frac{2}{x}$	+	+
$2\ln x-1$	−	+
$f'(x)$	−	+

TP bei $\sqrt{e}$

$f(\sqrt{e})=2\ln\sqrt{e}\left(\ln\sqrt{e}-1\right)=2\cdot\frac{1}{2}\ln e\left(\frac{1}{2}\ln e-1\right)=1\cdot(\frac{1}{2}-1)=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow TP\left(\sqrt{e}\,|-\frac{1}{2}\right)$

1.4 $f''(x)=-\frac{2}{x^2}(2\ln x-1)+\frac{2}{x}\cdot\frac{2}{x}=\frac{2}{x^2}(-2\ln x+1+2)=\frac{2}{x^2}(3-2\ln x)=0$

$\Rightarrow 3-2\ln x=0 \ \Rightarrow \ln x=1{,}5 \ \Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$

$f(e^{\frac{3}{2}})=2\ln e^{\frac{3}{2}}\left(\ln e^{\frac{3}{2}}-1\right)=2\cdot\frac{3}{2}\ln e\left(\frac{3}{2}\ln e-1\right)=$

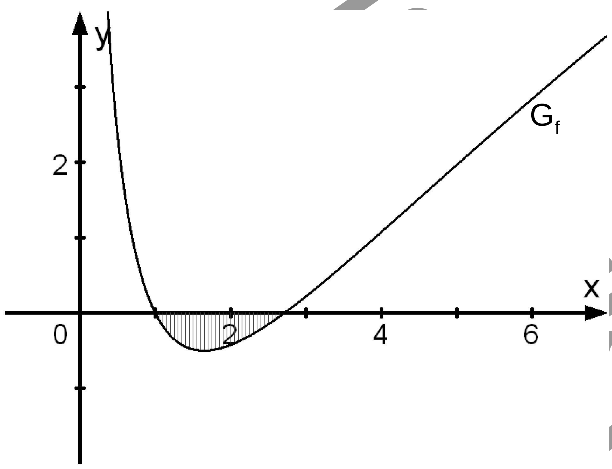
$=3\cdot(\frac{3}{2}-1)=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow WP\left(e^{\frac{3}{2}}\,|\,1{,}5\right)$

	0 … $e^{\frac{3}{2}}$	$e^{\frac{3}{2}}$ … x
$\frac{2}{x^2}$	+	+
$3-2\ln x$	+	−
$f''(x)$	+	−

WP bei $e^{\frac{3}{2}}$

1.5

x	0,5	1	1,5	$\sqrt{e}\approx 1{,}65$	2	e	3	4	$e^{\frac{3}{2}}\approx 4{,}485$	4,5	5	6
f(x)	2,35	0	-0,48	-0,5	-0,43	0	0,22	1,07	1,5	1,52	1,96	2,84



1.6.1 $F'(x)=2\cdot(\ln x)^2+2x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}+a\ln x+ax\cdot\frac{1}{x}+b=2\cdot(\ln x)^2+4\ln x+a\ln x+a+b$

$F'(x)=2(\ln x)^2+(\underbrace{4+a}_{=-2})\ln x+\underbrace{a+b}_{=0}=f(x)$

$\Rightarrow \begin{cases}4+a=-2 \ \Rightarrow \underline{\underline{a=-6}}\\ a+b=0 \ \Rightarrow b=-a \ \Rightarrow \underline{\underline{b=6}}\end{cases}$

1.6.2 Für das Krümmungsverhalten ist $F''(x) = f'(x)$ zuständig. Aus 1.3 folgt somit:

G_F ist rechtsgekrümmt für $x \in \left]0;\sqrt{e}\right]$ G_F ist linksgekrümmt für $x \in \left[\sqrt{e};\infty\right[$

1.6.3 $A = \int_1^e \left(0 - f(x)\right)dx = -\left[F(x)\right]_1^e = F(1) - F(e) =$

$= 2\cdot(\ln 1)^2 - 6\ln 1 + 6 - \left(2e(\ln e)^2 - 6e\ln e + 6e\right) = 6 - 2e$

2.1 $g_a(x) = -ax + \dfrac{2a-1}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{2a-1}{x} = ax \Rightarrow 2a-1 = ax^2 \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} x^2 = \dfrac{2a-1}{a}$

$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{a}}$

	$a<0$	$0<a<\frac{1}{2}$	$a>\frac{1}{2}$
$2a-1$	$-$	$-$	$+$
a	$-$	$+$	$+$
$\frac{2a-1}{a}$	$+$	$-$	$+$

1. Fall: $a < 0$ zwei NSTen $x_{1/2} = \pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{a}}$
2. Fall: $a = 0$ nicht erlaubt
3. Fall: $0 < a < \frac{1}{2}$ keine Nullstellen
4. Fall: $a = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0 \notin D_{g_a}$ keine Nullstellen
5. Fall: $a > \frac{1}{2}$ zwei Nullstellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{a}}$

2.2 $g_a'(x) = -a - \dfrac{2a-1}{x^2}$

$g_a'\left(\sqrt{\frac{2a-1}{a}}\right) = -a - \dfrac{2a-1}{\left(\sqrt{\frac{2a-1}{a}}\right)^2} = -a - \dfrac{2a-1}{\frac{2a-1}{a}} = -a - \dfrac{a(2a-1)}{2a-1} = -a - a = -2a$

da $y = \underbrace{-2}_{=m_{t_a}}x + 2$ folgt: $g_a'\left(\sqrt{\frac{2a-1}{a}}\right) = -2a = -2 \Rightarrow \underline{\underline{a = 1}}$

3.1 $V = r^2\pi h \Rightarrow h = \dfrac{V}{r^2\pi}$ $O = r^2\pi + 2r\pi h = r^2\pi + 2r\pi\dfrac{V}{r^2\pi} = r^2\pi + \dfrac{2V}{r}$

$O(r) = r^2\pi + \dfrac{2V}{r}$ mit $r > 0$

3.2 $O'(r) = 2r\pi - \dfrac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow 2r\pi = \dfrac{2V}{r^2} \Rightarrow 2r^3\pi = 2V \Rightarrow r^3 = \frac{V}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

$\lim\limits_{r \overset{>}{\to} 0} O(r) = \lim\limits_{r \overset{>}{\to} 0}(\underbrace{r^2\pi}_{\to 0} + \underbrace{\tfrac{2V}{r}}_{\to\infty}) \to \infty$

$\lim\limits_{r \to \infty} O(r) = \lim\limits_{r \to \infty}(\underbrace{r^2\pi}_{\to \infty} + \underbrace{\tfrac{2V}{r}}_{\to 0}) \to \infty$

$O(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}})$ ist eine positive reelle Zahl

$O(r)$ ist stetig und diffbar in ganz D

$\Rightarrow O_{min} = O(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}})$

3.3 $V = 100l = 100dm^3 = 10^8 mm^3$

$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{10^8 mm^3}{\pi}} \approx \underline{\underline{317mm}}$

$h = \dfrac{V}{r^2\pi} = \dfrac{V}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2\pi} = \dfrac{V}{\frac{V^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}\pi} = \dfrac{V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = r_0 \approx \underline{\underline{317mm}}$