A II

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot (\ln x)^2 - \ln(x^2)$ in der Definitionsmenge $D_f = \{ x \mid x \in IR \wedge x > 0 \}$.
3	1.1	Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm f(x) auch in der Form $f(x) = 2 \cdot \ln x \cdot (\ln x - 1)$ darstellen lässt und bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.
3	1.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to 0$ und $x \to \infty$.
8	1.3	Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph von f streng monoton steigt bzw. fällt. Zeigen Sie, dass der Graph einen Extremalpunkt besitzt, und geben Sie dessen Art und Koordinaten an. (mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{2}{x}(2\ln x - 1)$)
5	1.4	Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f .
5	1.5	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und einer geeigneten Wertetabelle, die auch den Wert f(0,5) enthält, den Graphen der Funktion f für $0 < x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.
	1.6.0	Gegeben ist zusätzlich die Funktion $F: x \mapsto 2x \cdot (\ln x)^2 + ax \cdot \ln x + bx$ in der Definitionsmenge $D_F = \{ x \mid x \in IR \wedge x > 0 \}$.
6	1.6.1	Bestimmen Sie die reellen Zahlen a und b so, dass F eine Stammfunktion von f ist. [Ergebnis: a = – 6 ; b = 6]
4	1.6.2	Beschreiben Sie aufgrund bereits bekannter Ergebnisse und ohne weitere Rechnung das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion F.
5	1.6.3	Der Graph von f schließt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie ohne Rundung die Maßzahl des zugehörigen Flächeninhalts.

2.0 Gegeben sind nun die reellen Funktionen $g_a : x \mapsto -a\,x + \frac{2a-1}{x}$

mit $D_{g_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8 2.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl und Lage der Nullstellen von g_a.

5 2.2 Es gelte nun $a > 0{,}5$.

Bestimmen Sie a so, dass die Tangente t_a des Graphen der Funktion g_a

im Punkt P ($\sqrt{\frac{2a-1}{a}}$; y_P) parallel zur Geraden mit der Gleichung $2x + y - 2 = 0$

verläuft.

3.0 Die Abmessungen einer oben offenen zylinderförmigen Tonne sollen so gewählt werden, dass bei festem Volumen V der Tonne der Materialverbrauch möglichst gering wird. Die Dicke des Materials ist vorgegeben und wird bei der Rechnung nicht berücksichtigt. Der Radius der kreisförmigen Grundfläche wird mit r, die Höhe der Tonne mit h bezeichnet.

4 3.1 Ermitteln Sie die Formel für die äußere Oberfläche O in Abhängigkeit vom Radius r und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge von O(r) an.

(Teillösung: $O(r) = r^2\pi + \frac{2V}{r}$)

6 3.2 Bestimmen Sie den Radius r_0 so, für den die Oberfläche $O(r_0)$ ein absolutes Minimum annimmt.

4 3.3 Berechnen Sie auf Millimeter gerundet die Abmessungen der Tonne mit minimalem Materialverbrauch, deren Volumen 100 Liter beträgt.

—

66