BE

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \dfrac{-16 \cdot e^x}{(e^x+1)^2}$ in der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

4 1.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{-16\cdot e^x}^{\to -\infty}}{\underbrace{\left(e^x+1\right)^2}_{\to\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-16\cdot e^x}{2\left(e^x+1\right)\cdot e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-8}{e^x+1} = 0$$

5 1.2 Weisen Sie nach, dass der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft.

$$f(-x) = \frac{-16\cdot e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2} = \frac{-16\cdot e^{-x}\cdot e^{2x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2\cdot e^{2x}} = \frac{-16\cdot e^x}{\left(e^{-x}+1\right)^2\cdot\left(e^x\right)^2} = \frac{-16\cdot e^x}{\left[\left(e^{-x}+1\right)\cdot e^x\right]^2}$$

$$= \frac{-16\cdot e^x}{\left[1+e^x\right]^2} = \frac{-16\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = f(x)$$

Somit ist der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse.

7 1.3 Bestimmen Sie für die Funktion f die maximalen Monotonieintervalle und geben Sie die Koordinaten und Art des Extremalpunktes des Graphen von f an.

(Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{16 \cdot e^x \cdot (e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}$)

$$f'(x) = \frac{\left(e^x+1\right)^2 \cdot \left(-16 \cdot e^x\right) - \left(-16 \cdot e^x\right) \cdot 2 \cdot \left(e^x+1\right) \cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^4}$$

$$f'(x) = \frac{\left(e^x+1\right)\left[\left(e^x+1\right) \cdot \left(-16 \cdot e^x\right) - \left(-16 \cdot e^x\right) \cdot 2 \cdot e^x\right]}{\left(e^x+1\right)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-16 \cdot e^{2x} - 16 \cdot e^x + 32e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^3}$$

$$f'(x) = \frac{16 \cdot e^{2x} - 16 \cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^3}$$

$$f'(x) = \frac{16e^x \cdot \left(e^x - 1\right)}{\left(e^x+1\right)^3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

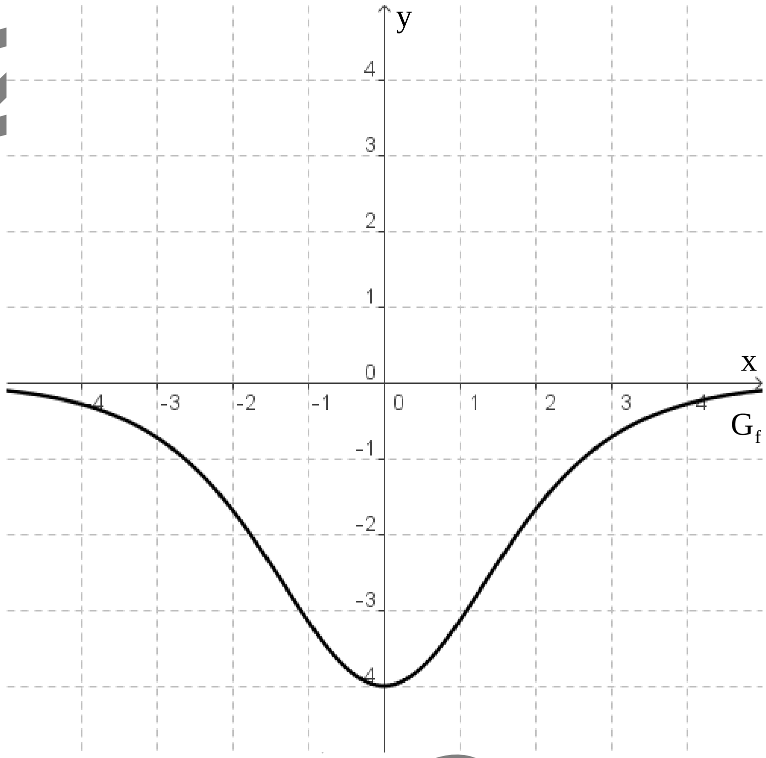
		0		x
$16e^x$	$+$		$+$	
$\left(e^x-1\right)$	$-$	0	$+$	
$\left(e^x+1\right)^3$	$+$		$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
G_f	$\searrow$	$\rightarrow$ TP	$\nearrow$	

G_f ist streng monoton fallend für $x \in \left]-\infty; 0\right]$.

G_f ist streng monoton steigend für $x \in \left[0; \infty\right[$.

$$f(0) = \frac{-16 \cdot e^0}{\left(e^0+1\right)^2} = -4 \quad \Rightarrow \quad TP\left(0 \middle| -4\right)$$

4 1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f für $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. Verwenden Sie eine eigene Seite und legen Sie den Koordinatenursprung etwa in die Seitenmitte.



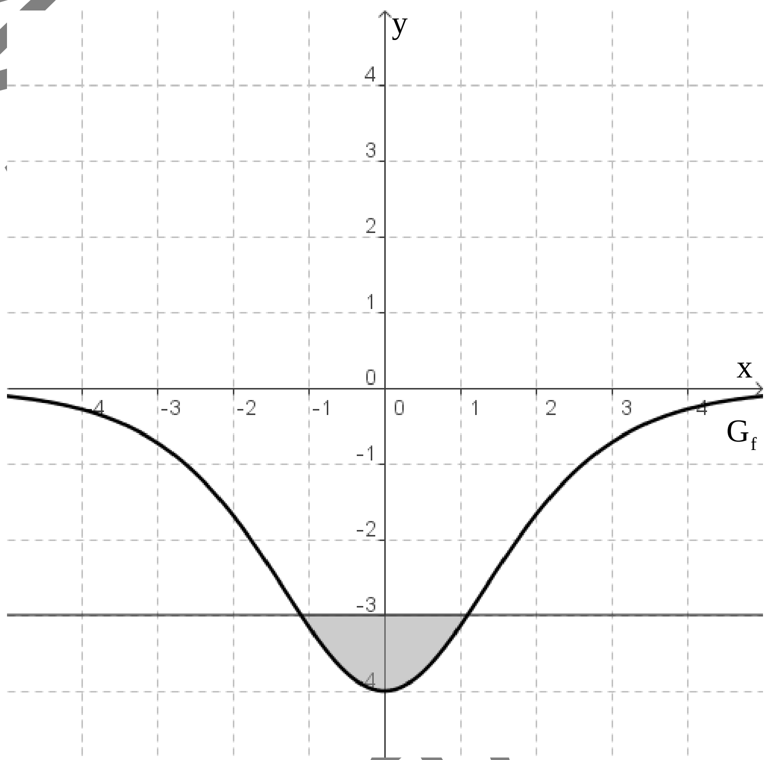
3 1.5 Gegeben ist die Funktion $F: x \mapsto \dfrac{a}{e^x + b}$ in der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die reellen Zahlen a und b so, dass F eine Stammfunktion von f ist.
(Ergebnis: a = 16; b = 1)

$$F'(x) = \frac{-a \cdot e^x}{\left(e^x + b\right)^2} = \frac{-16 \cdot e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} \quad \Rightarrow \quad a = 16 \wedge b = 1$$

$$F(x) = \frac{16}{e^x + 1}$$

8 1.6 Die Gerade mit der Gleichung $y = -3$ schließt mit dem Graphen von f ein endliches Flächenstück ein.
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück im Schaubild aus Aufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.
(Teilergebnis: für die obere Integrationsgrenze b gilt: $b = \ln 3$)



Berechnung der Schnittstellen:

$$f(x) = \frac{-16 \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = -3 \;\Rightarrow\; -16e^x = -3\left(e^{2x} + 2e^x + 1\right) \;\Rightarrow\; -3e^{2x} + 10e^x - 3 = 0$$

Substitution: $e^x = z$

$$-3z^2 + 10z - 3 = 0 \;\Rightarrow\; z_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot(-3)\cdot(-3)}}{2\cdot(-3)} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{-6} = \frac{-10 \pm 8}{-6} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ 3 \end{cases}$$

Rücksubstitution:

$e^x = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $e^x = 3$

$x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$ $\qquad$ $x = \ln(3)$

$$A = 2 \cdot \int_0^{\ln(3)} \left(-3 - \frac{-16 \cdot e^x}{(e^x+1)^2}\right) dx = 2 \cdot \left[-3x - \frac{16}{e^x+1}\right]_0^{\ln(3)} = 2 \cdot \left(-3 \cdot \ln(3) - \frac{16}{e^{\ln(3)}+1} - \left(-3 \cdot 0 - \frac{16}{e^0+1}\right)\right)$$

$$A = 2 \cdot \left(-3 \cdot \ln(3) - \frac{16}{3+1} + \frac{16}{2+1}\right) = 2 \cdot \left(-3 \cdot \ln(3) + 4\right) = 8 - 6\ln(3) \approx 1{,}41$$

1.7.0 Gegeben ist nun die reelle Funktion $h: x \mapsto h(x) = \ln(F(x)) = \ln\frac{16}{e^x+1}$ in der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.

7 1.7.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von h mit den Koordinatenachsen. Zeigen Sie auch, dass der Graph von h eine Asymptote besitzt und geben Sie deren Gleichung an.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$h(0) = \ln\frac{16}{e^0+1} = \ln(8) \quad \Rightarrow \quad S_y\left(0|\ln(8)\right)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$h(x) = \ln\frac{16}{e^x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{e^x+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^x+1 = 16 \quad \Rightarrow \quad e^x = 15 \quad \Rightarrow \quad x = \ln(15)$$

$$\Rightarrow \quad S_x\left(\ln(15)|0\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\frac{16}{\underbrace{e^x}_{0}+1} = \ln(16) = \ln\left(2^4\right) = 4\ln(2) \quad \Rightarrow \quad \text{waagrechte Asymptote}: y = 4\ln(2)$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\underbrace{\frac{16}{\underbrace{e^x+1}_{\to\infty}}}_{\to 0^+} \to -\infty$$

6 1.7.2 Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von h und stellen Sie fest, ob ein Wendepunkt vorliegt.

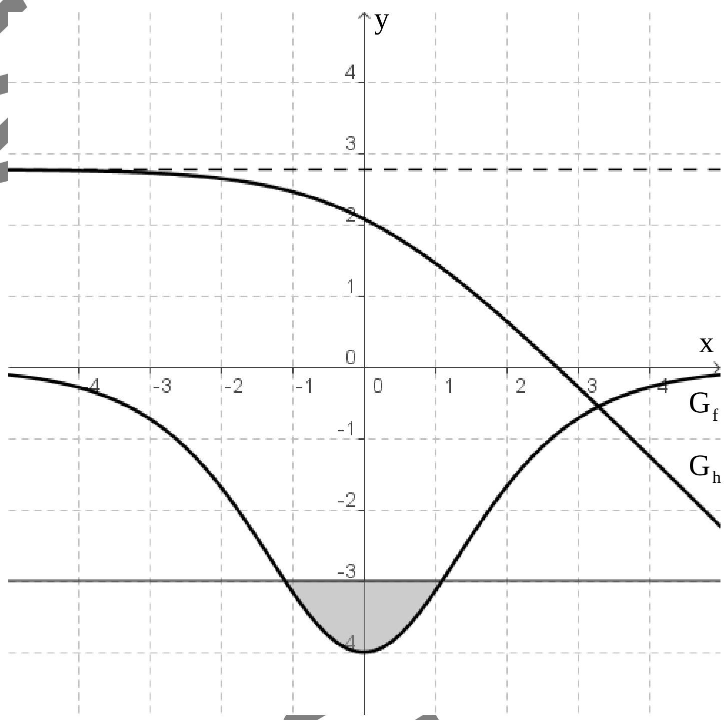
(Teilergebnis: $h'(x) = -\frac{e^x}{e^x+1}$)

$$h(x) = \ln\frac{16}{e^x+1} = \ln(16) - \ln\left(e^x+1\right) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = -\frac{e^x}{e^x+1}$$

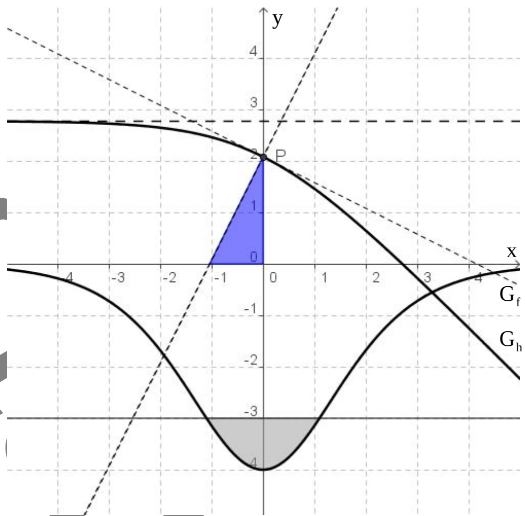
$$h''(x) = -\frac{\left(e^x+1\right)\cdot e^x - e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = -\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{\overbrace{-e^x}^{<0}}{\underbrace{\left(e^x+1\right)^2}_{>0}} < 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{D}_h$$

Somit ist der Graph der Funktion h für alle $x \in \mathbb{D}_h$ rechtsgekrümmt, es gibt somit auch keinen Wendepunkt.

3 1.7.3 Zeichnen Sie den Graphen von h und dessen Asymptote für $-4 \le x \le 4$ in das Schaubild aus Aufgabe 1.4 .



6 1.7.4 Die Normale an den Graphen von h im Punkt $P(0; y_P)$ schließt mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein.
Berechnen Sie die Flächenmaßzahl diese Flächenstücks.



Koordinaten des Punktes P:

$P\left(0 \middle| \ln(8)\right)$ (vgl. 1.7.1)

Steigung der Tangente an G_h in P:

$$h'(0) = -\frac{e^0}{e^0+1} = -\tfrac{1}{2}$$

Steigung der Normale:

$$m_n \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad m_n = 2$$

Normalengleichung:

$$n: y = 2x + \ln(8)$$

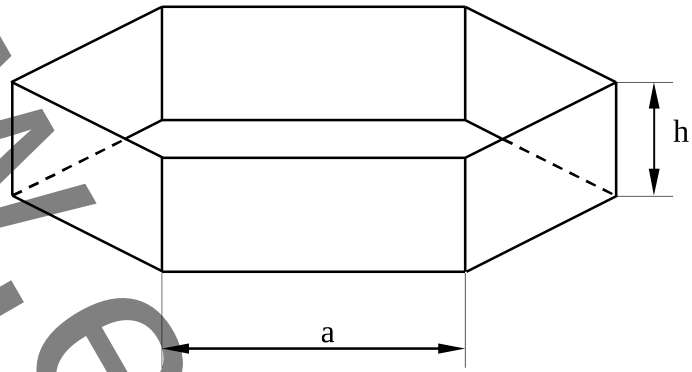
Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$0 = 2x + \ln(8) \quad \Rightarrow \quad x = -\tfrac{\ln(8)}{2}$$

Gesuchte Fläche:

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\ln(8)}{2} \cdot \ln(8) = \tfrac{1}{4} \cdot \left(\ln(8)\right)^2 = \tfrac{1}{4} \cdot \left(\ln\left(2^3\right)\right)^2 = \tfrac{9}{4} \cdot \left(\ln(2)\right)^2 \approx 1{,}08$$

2.0 Eine Firma stellt Pflanztröge aus Holz her. Diese haben die Form eines oben offenen geraden Prismas, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a in cm ist (siehe Skizze).
Das Volumen eines solchen Trogs beträgt 100 Liter. Die gesamte Innenfläche soll mit einer wasserdichten Folie bezogen werden.



6 2.1 Zeigen Sie, dass für den von a abhängigen Flächeninhalt A(a) dieser Folie gilt:

$$A(a) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 + \frac{400000\ cm^3}{\sqrt{3} \cdot a}.$$

Für den gesuchten Flächeninhalt (Oberfläche) gilt:

$$A = 6 \cdot A_{Rechteck} + A_{6-Eck} = 6 \cdot a \cdot h + \tfrac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$$

Für das Volumen gilt:

$$V = A_{6-Eck} \cdot h = \tfrac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 \cdot h = 100000 \quad \left(100\ell = 100dm^3 = 100000cm^3\right)$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{100000}{\tfrac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}$$

h in die Flächenfunktion eingesetzt:

$$A(a) = 6 \cdot a \cdot \frac{100000}{\tfrac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2} + \tfrac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 = \frac{400000}{\sqrt{3} \cdot a} + \tfrac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$$

Mit $\mathbb{D}_A =]0;\infty[$

7 2.2 Berechnen Sie a so, dass die Folie des Troges die minimale Fläche hat. Runden Sie Ihr Ergebnis auf eine Nachkommastelle.

$$A'(a) = -\frac{400000}{\sqrt{3}\cdot a^2} + 3\cdot\sqrt{3}\cdot a = 0 \;\Rightarrow\; \frac{400000}{\sqrt{3}\cdot a^2} = 3\cdot\sqrt{3}\cdot a \;\Rightarrow\; 400000 = 3\cdot 3\cdot a^3$$

$$\Rightarrow\; a = \sqrt[3]{\frac{400000}{9}} \approx 35{,}4$$

$$A''(a) = 2\cdot\frac{400000}{\sqrt{3}\cdot a^3} + 3\cdot\sqrt{3}$$

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{400000}{9}}\right) = 2\cdot\frac{400000}{\sqrt{3}\cdot\frac{400000}{9}} + 3\cdot\sqrt{3} = 2\cdot\frac{9}{\sqrt{3}} + 3\cdot\sqrt{3} = 9\sqrt{3} > 0 \;\Rightarrow\; \text{lk} \;\Rightarrow\; \text{TP}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{a \overset{>}{\to} 0} A(a) = \lim_{a \overset{>}{\to} 0}\left(\underbrace{\frac{400000}{\sqrt{3}\cdot a}}_{\to\infty} + \underbrace{\tfrac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a^2}_{\to 0}\right) \to \infty \\
&A\left(\sqrt[3]{\tfrac{400000}{9}}\right) = \frac{400000}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{400000}{9}}} + \tfrac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt[3]{\tfrac{400000}{9}}\right)^2 \approx 9779{,}5 \\
&\lim_{a\to\infty} A(a) = \lim_{a \overset{>}{\to} 0}\left(\underbrace{\frac{400000}{\sqrt{3}\cdot a}}_{\to 0} + \underbrace{\tfrac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a^2}_{\to\infty}\right) \to \infty
\end{aligned}\right\} \Rightarrow A_{min} = 9779{,}5 \text{ für } a = 35{,}4$$

Somit liegt eine minimale Fläche für $a = 35{,}4$ vor.

66