Musterlösung der Abschlussprüfung 2002 BI (Technik)

1.1 $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t-1 \\ -1 \\ 2t+3 \end{pmatrix}$

1.2 $\begin{pmatrix} t-1 \\ -1 \\ 2t+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow t-1+1-2t-3=0 \Rightarrow -t-3=0 \Rightarrow t=-3$

$\left|\overrightarrow{n_E}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

HNF von E: $\dfrac{-x_1+x_2+x_3-4}{\sqrt{3}}$

$d(g_{-3};E) = \dfrac{\left|-2+2+2-4\right|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

1.3 $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{0}+\vec{a}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$F: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 2(x_1-1)+2(x_2-1)+2(x_3-1)=0$

$F: x_1+x_2+x_3-3=0$

1.4 $E: x_1-x_2-x_3+4=0$

$F: x_1+x_2+x_3-3=0$

$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \quad \lrcorner +$

$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}$

$2x_1 = -1 \;\Rightarrow\; x_1 = -0{,}5$

Wähle $x_3 = \mu \;\Rightarrow\; -0{,}5 - x_2 - \mu = -4 \;\Rightarrow\; x_2 = 3{,}5-\mu$

$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.5 Sei $X \in s$

$\left|\overline{0X}\right| = \sqrt{(-0{,}5)^2+(3{,}5-\mu)^2+\mu^2} = \sqrt{0{,}25+12{,}25-7\mu+\mu^2+\mu^2} = \sqrt{2\mu^2-7\mu+12{,}5}$

$$\left|\overrightarrow{AX}\right| = \sqrt{(-2,5)^2 + (1,5-\mu)^2 + (\mu-2)^2} = \sqrt{6,25 + 2,25 - 3\mu + \mu^2 + \mu^2 - 4\mu + 4} =$$

$$= \sqrt{2\mu^2 - 7\mu + 12,5}$$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{0X}\right| = \left|\overrightarrow{AX}\right| \;\Rightarrow$ Dreieck ist immer gleichschenklig

1.6 $A = \frac{1}{2} gh$ mit $g = \left|\overrightarrow{0A}\right|$

$\Rightarrow$ A ist minimal, falls h minimal ist

$$\Rightarrow MC \perp s: \begin{pmatrix} -1,5 \\ 2,5-\mu \\ -1+\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,; \; -2,5 + \mu - 1 + \mu = 0 \;\Rightarrow\; \mu = 1,75$$

$\Rightarrow C\left(-0,5 \,|\, 1,75 \,|\, 1,75\right)$

ODER:

$$h = \left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{(-1,5)^2 + (2,5-\mu)^2 + (-1+\mu)^2} =$$

$$= \sqrt{2,25 + 6,25 - 5\mu + \mu^2 + 1 - 2\mu + \mu^2} =$$

$$= \sqrt{2\mu^2 - 7\mu + 9,5}$$

Hat ein Minimum beim Scheitel der Parabel unter der Wurzel: $\mu_S = 1,75$

2.1
$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & a & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & -1 & -1 & -4 & \\ 0 & -2 & -2 & -7 & \cdot 3 \\ 0 & -6 & -1-a & -4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & a-5 & -17 \end{array}$$

Keine Lösung für $a = 5$ da $Rg(A) = 2 < 3 = Rg(A_{erw})$

2.2 $\lambda_1 \overrightarrow{n_E} + \lambda_2 \overrightarrow{n_F} = \overrightarrow{n_{H_5}}$

(1) $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

(2) $-\lambda_1 + \lambda_2 = 5$

(3) $-\lambda_1 + \lambda_2 = 5$ wie (2)

$(1)+(2)$: $2\lambda_2 = 6 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = 3$ in (1) $\lambda_1 = -2$

$\overrightarrow{n_{H_5}} = -2\overrightarrow{n_E} + 3\overrightarrow{n_F}$

Jede Schnittgerade von je zwei Ebenen verläuft senkrecht zu den zugehörigen Normalenvektoren. Da alle Normalenvektoren in einer Ebene liegen, sind alle Schnittgeraden parallel.