2002 B I

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist der Punkt $A(2;2;2)$, die Punktmenge $B_t(t+1;1;2t+5)$ mit $t \in \mathbb{R}$ sowie die Ebene E in Normalenform gegeben:
$E: x_1 - x_2 - x_3 + 4 = 0$

1.1 Durch die Punkte A und B_t wird für $t \in \mathbb{R}$ eine Menge von Geraden g_t festgelegt. Bestimmen sei eine Gleichung dieser Menge von Geraden.

1.2 Bestimmen Sie aus der Menge der Geraden g_t diejenige Gerade, die parallel zur Ebene E verläuft, und berechen Sie deren Abstand zur Ebene E.

1.3 Der Koordinatenursprung und der Punkt A liegen symmetrisch bezüglich einer Ebene F. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene F in Normalenform.
(Mögliches Ergebnis: $F: x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$)

1.4 Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden s, in der sich die Ebene E und F schneiden.

1.5 Begründen Sie, dass jeder Punkt der Geraden s aus Aufgabe 1.4 zusammen mit dem Koordinatenursprung und dem Punkt A ein gleichschenkliges Dreieck bestimmt.

1.6 Berechnen Sie nun die Koordinaten des Punktes $C \in s$, für den das gemäß Aufgabe 1.5 zugehörige gleichschenklige Dreieck minimalen Flächeninhalt hat.

2.0 Die Gleichungen der Normalenform der Ebene E und F der vorangegangenen Aufgaben sowie einer weiteren Ebene H_a mit $a \in \mathbb{R}$ ergeben folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} E: &\quad x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ F: &\quad x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ H_a: &\quad x_1 + 5x_2 + ax_3 = 0 \end{aligned}$$

2.1 Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und einer Rangbetrachtung den Wert für a, für den das Gleichungssystem keine Lösung hat.

2.2 Stellen Sie einen Normalenvektor von H_5 als Linearkombination von Normalenvektoren der Ebene E und F dar. Beschreiben und begründen Sie die besondere gegenseitige Lage der Schnittgeraden von je zwei der Ebenen E, F und H_5.