Abschlussprüfung 2002 AII

1.1 $\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}+4}=0 \quad |\cdot(e^{2x}+4)$, keine Fallunterscheidung, da $e^{2x}+4>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$

$e^{2x}-4=0$

$(e^x)^2-4=0$

$(e^x)^2=4$

$e^{x_1}=2 \quad \vee \quad e^{x_2}=-2$ Widerspruch

$x_1=\ln 2$

Alternativ:

$e^{2x}-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x}=4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=\ln 4 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}\ln 4=\ln 4^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{4}=\ln 2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{e^{2x}-4}^{\to\infty}}{\underbrace{e^{2x}+4}_{\to\infty}} \overset{L`H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=1;\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{e^{2x}}^{\to 0}-4}{\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}+4}=-\frac{4}{4}=-1$$

Alternativ (ohne L`Hospital)

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{2x}+4-8}{e^{2x}+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{2x}+4}{e^{2x}+4}+\frac{-8}{e^{2x}+4}=\lim_{x\to\pm\infty}1+\frac{-8}{e^{2x}+4}$

$\lim_{x\to+\infty}1+\underbrace{\frac{-8}{\underbrace{e^{2x}+4}_{\to\infty}}}_{\to 0}=1;\lim_{x\to-\infty}1+\frac{-8}{\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}+4}=1-2=-1$

zwei horizontale Asymptoten:

$t(x)=1; u(x)=-1$

1.2 Die erste Ableitung wird mit Hilfe der Quotientenregel gebildet:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot(e^{2x}+4)-2e^{2x}(e^{2x}-4)}{(e^{2x}+4)^2}=\frac{2e^{2x}\cdot[(e^{2x}+4)-(e^{2x}-4)]}{(e^{2x}+4)^2}=\frac{2e^{2x}\cdot[e^{2x}+4-e^{2x}+4]}{(e^{2x}+4)^2}=\underbrace{\frac{\overbrace{16e^{2x}}^{>0}}{\underbrace{(e^{2x}+4)^2}_{>0}}}_{>0}>0$$

Die Funktion f ist für ganz $\mathbb{R}$ echt monoton zunehmend.

1.3 Die zweite Ableitung wird mit Hilfe der Quotientenregel gebildet:

$$f''(x)=\frac{32e^{2x}\cdot(e^{2x}+4)^2-16e^{2x}\cdot 2(e^{2x}+4)\cdot 2e^{2x}}{((e^{2x}+4)^2)^2}=\frac{32e^{2x}\cdot(e^{2x}+4)^2-64(e^{2x})^2\cdot(e^{2x}+4)}{(e^{2x}+4)^4}=$$

$$\frac{32e^{2x}\cdot(e^{2x}+4)-64(e^{2x})^2}{(e^{2x}+4)^3}=\frac{-32e^{2x}(-e^{2x}-4+2e^{2x})}{(e^{2x}+4)^3}=\frac{-32e^{2x}(e^{2x}-4)}{(e^{2x}+4)^3}=0 \quad |\cdot\frac{-32e^{2x}}{(e^{2x}+4)^3}<0\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$e^{2x}-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln 2$ siehe 1.1

		$ln2$
$(e^{2x}-4)$	$-$	$+$
$-32e^{2x}$	$-$	$-$
$(e^{2x}+4)^3$	$+$	$+$
	$+$	$-$

Der Graph von f ist für $x\in]-\infty;\ln\ 2]$ rechtsgekrümmt.

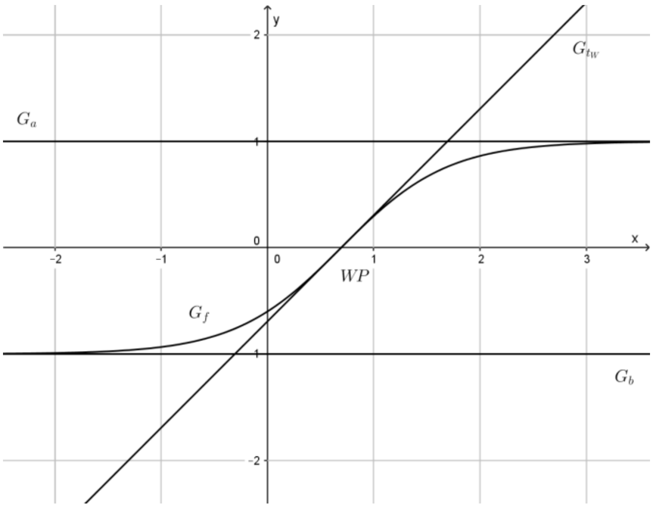
Der Graph von f ist für $x\in[\ln 2\,;\infty[$ linksgekrümmt.

$\Rightarrow WP(\ln 2\,;0)$

Bestimmung der Wendetangente t_W:

$$f'(\ln 2) = \frac{16 \cdot e^{2\ln 2}}{(e^{2\ln 2}+4)^2} = \frac{64}{64} = 1$$
$$t_W(x) = 1(x - \ln 2) + 0 = x - \ln 2$$

1.4



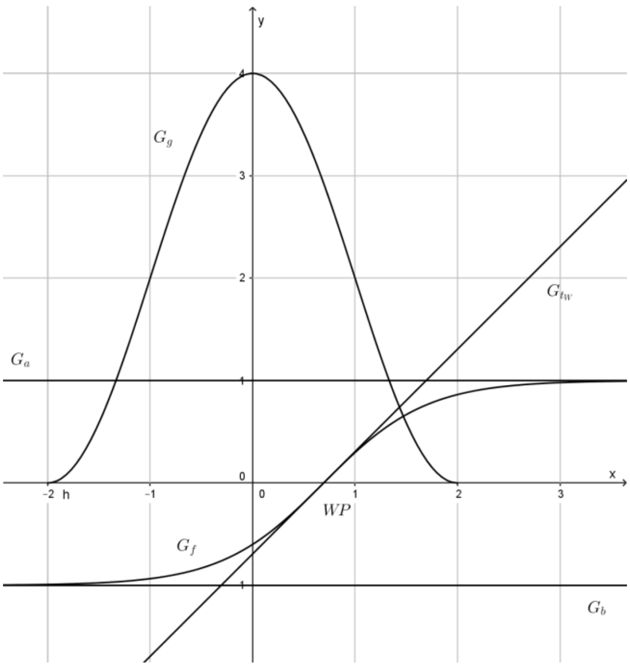
1.5.1

$$g'(x) = -ab\sin(bx)\,; \quad g''(x) = -ab^2\cos(bx)$$

$$\begin{aligned}
&I \quad g(0) = 4 \quad a \cdot \cos(b \cdot 0) + c = 4 && \Rightarrow \; a + 2 = 4\\
&II \quad g(1) = 2 \quad a \cdot \cos(b \cdot 1) + c = 2 && \Rightarrow \; c = 2\\
&III \; g''(x) = 0 \quad -ab^2\cos(b \cdot 1) = 0 \quad da\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \cos b = 0 \quad b = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = 2$$

1.5.2



1.5.3

$$\int_{-2}^{2}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+2\right)dx=\left[\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+2x\right]_{-2}^{2}=$$

$$\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\sin(\pi)+2\cdot 2-\left(\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\sin(-\pi)+2\cdot(-2)\right)=4-(-4)=8$$

1.6

$h(x)=f(x)-g(x)=\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}+4}-\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+2\right)=\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}+4}-2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-2$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{16e^{2x}}{(e^{2x}+4)^2}+\pi sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Startwert $x_0=1$

$$x_1=1-\frac{h(1)}{h'(1)}=1-\frac{-1{,}70243}{4{,}0530}=1{,}4200$$

$$x_2=1{,}42-\frac{h(1{,}42)}{h'(1{,}42)}=1{,}42-\frac{-0{,}15305}{3{,}09654}=1{,}47$$

2.1

$I\quad A(r,h)=2\cdot A_{Front}+2\cdot A_{Seite}+\frac{1}{2}\cdot O_{Zylinder}=$

$=2\cdot 2r\cdot h+2\cdot 4r\cdot h+\frac{1}{2}\cdot(2r^2\pi+2r\pi\cdot 4r)=12rh+5r^2\pi$

$II\quad V(r;h)=V_{Quader}+\frac{1}{2}V_{Zylinder}=2r\cdot 4r\cdot h+\frac{1}{2}r^2\pi\cdot 4r=8r^2h+\ 2r^3\pi$

II auflösen nach h:

$8r^2h=V-2r^3\pi\quad\Leftrightarrow\quad h=\frac{V}{8r^2}-\frac{2r^3\pi}{8r^2}=\frac{V}{8r^2}-\frac{r\pi}{4}$

h in A(r;h) einsetzen: (h eliminieren)

$A(r)=12r\left(\frac{V}{8r^2}-\frac{r\pi}{4}\right)+5r^2\pi=\frac{3V}{2r}-3r^2\pi+5r^2\pi=\frac{3V}{2r}+2r^2\pi$

2.2

Bestimmung der Definitionsmenge von A:

$h\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{300}{8r^2}-\frac{r\pi}{4}\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{150}{4r^2}-\frac{r\pi}{4}\geq 0\quad\Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{4r^2}\left(r^3-\frac{150}{\pi}\right)\geq 0$

$$-\frac{\pi}{4r^2}\left(r-\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)\left(r^2+\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}r+\left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)^2\right)\geq 0\Leftrightarrow r\leq\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\Rightarrow\mathbb{D}=\left[0;\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right]$$

$A'(r)=\frac{d}{dr}\left(\frac{900}{2r}+2r^2\pi\right)=-\frac{900}{2r^2}+4r\pi=\ -\frac{450}{r^2}+4r\pi=0\quad|\cdot r^2$

$4r^3\pi-450=0\quad|:(4\pi)$

$r^3-\frac{225}{2\pi}=0\qquad\Leftrightarrow\qquad r^3-\left(\sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}}\right)^3=0$

$$\left(r-\sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}}\right)\left(r^2+\sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}}r+\left(\sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}}\right)^2\right)=0$$

Faktorisierung: siehe Merkhilfe Seite 1, Binomische Formeln, Zeile 3, rechte Spalte
Da die zweite Klammer stets positiv ist, und die erste einen Vorzeichenwechsel von „-„ nach „+“ bewirkt liegt ein Minimum vor. Dieses ist absolut, da der Wert im Definitionsbereich liegt und an beiden Seiten des Definitionsbereichs ein Randmaximum ist.