2002 A I

BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_t: x \mapsto \frac{x^2 - tx + t}{x^2}$ mit $t \in \mathbb{R}$ in der maximalen von t unabhängigen Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
8	1.1	Ermitteln Sie die Art der Definitionslücke sowie die Anzahl der Nullstellen von f_t jeweils in Abhängigkeit vom Parameterwert t.
	1.2.0	Für $t = -2$ ist nun $f_{-2}: x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2}$ gegeben.
5	1.2.1	Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten des Graphen von f_{-2}.
7	1.2.2	Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten des relativen Extremalpunktes sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f_{-2}. (Mögliches Zwischenergebnis: $f'_{-2}(x) = \frac{-2x + 4}{x^3}$)
7	1.2.3	Bestimmen Sie den Funktionsterm der Geraden g, die den Graphen von f_{-2} im Punkt $P(1; y_p)$ berührt. Berechnen sie auch den weiteren gemeinsamen Punkt dieser Geraden mit dem Graphen von f_{-2}.
7	1.2.4	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_{-2} und die Gerade g in ein kartesisches Koordinatensystem im Bereich $-5 \le x \le 5$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte $f_{-2}(-5)$ und $f_{-2}(5)$. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.
	1.3.0	Der Graph von f_{-2} schließt mit seiner waagrechten Asymptote und der Geraden $x = u$ ($u \in \mathbb{R}$ und $u > 1$) ein vollständig im I. Quadranten liegendes Flächenstück ein.
8	1.3.1	Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt $A(u)$ dieses Flächenstücks in Abhängigkeit von u wie folgt dargestellt werden kann: $A(u) = 2 \cdot \ln u + \frac{2}{u} - 2$. Untersuchen Sie auch, ob $A(u)$ für $u \to \infty$ einen Grenzwert besitzt.
8	1.3.2	Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren einen Näherungswert für u, für den $A(u) = 1$ gilt. Beginnen Sie dabei mit dem Startwert $u_0 = 3$, führen Sie drei Näherungsschritte durch und geben Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen gerundet an. Schraffieren Sie das entsprechende Flächenstück mit $A(u) = 1$ im Diagramm aus 1.2.4.

2.0 Beim Ladevorgang eines bestimmten Kondensators kann die Stromstärke $J(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t mathematisch idealisiert und ohne Verwendung von Einheiten durch den folgenden Funktionsterm dargestellt werden:

$J(t) = 130 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ für $0 \leq t \leq t_E$;

t_E ist dabei der Zeitpunkt, zu dem der Ladevorgang beendet wird.

4 2.1 Der Zeitpunkt t_E ist erreicht, wenn $J(t)$ unter 5% seines Anfangswertes sinkt. Zeigen Sie, das gilt: $t_E \approx 12$.

5 2.2 Stellen Sie in einem kartesischen Koordinatensystem für den betrachteten Ladevorgang den Graph der Stromstärke in Abhängigkeit von der Zeit dar. Wählen Sie dazu selbst einen geeigneten Maßstab und berechnen Sie geeignete Funktionswerte.

2.3.0 Die im Zeitintervall von t_1 bis t_2 transportierte Ladung lässt durch folgende Integration berechnen:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} J(t)dt .$$

4 2.3.1 Berechnen Sie die Maßzahl der Ladung des betrachteten Kondensators zum Zeitpunkt t_E, und stellen Sie diese Maßzahl im Diagramm aus 2.2 graphisch dar.

3 2.3.2 Berechnen Sie die theoretisch maximale Ladung, sie sich für $t_E \to \infty$ ergeben würde, und den Prozentsatz, zu dem der Kondensator zum Zeitpunkt t_E geladen ist.

66